

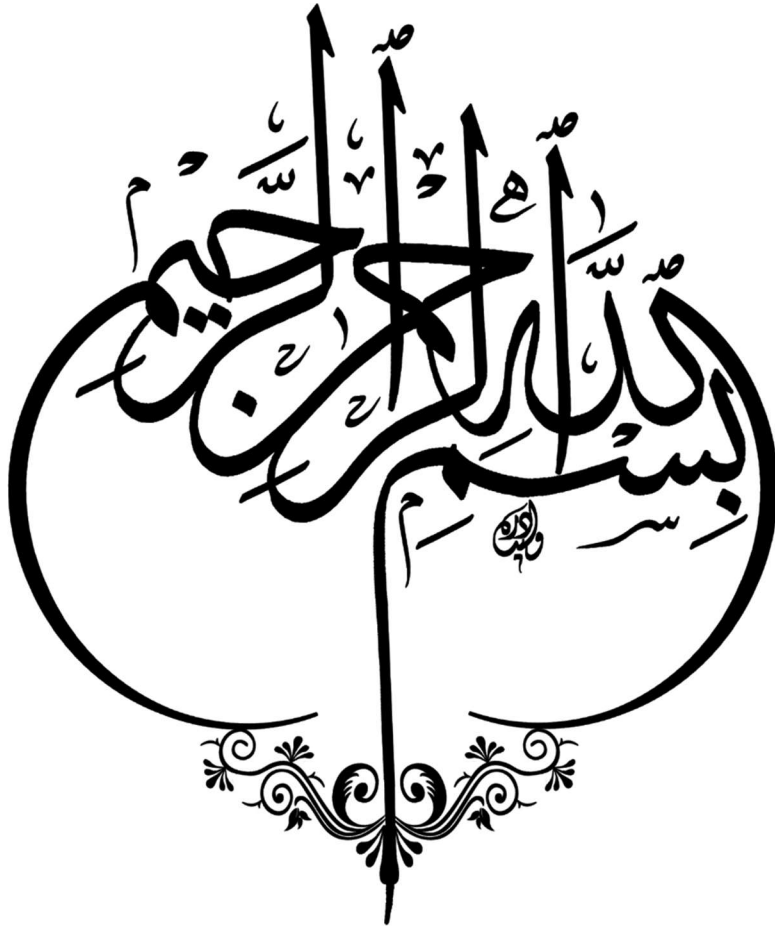


حقيبة المرحلة الأولى

المسار العلمي "نسمو"

رياضيات ناشئين

الفريق العلمي للرياضيات



الفهرس

م	الموضوع	الصفحة
1	المقدمة.	3
2	الوحدة الأولى: الجبر	4
	الأعداد الصحيحة وخواصها	5
	أسئلة التحدي	10
	مجموعة الأعداد النسبية Q	11
	أسئلة التحدي	19
3	الوحدة الثانية: الهندسة	20
	النقاط، المستقيمت، والزوايا	21
	المثلثات	27
	المضلعات	31
	الرباعيات	32
4	الوحدة الثالثة: نظرية الأعداد	37
	مقدمة في نظرية الأعداد: قابلية القسمة والتحليل إلى العوامل الأولية	38
5	الوحدة الرابعة: التركيبات	44
	العد باستخدام أشكال فن	45
	عد قائمة من الأعداد	47
6	الحلول	49

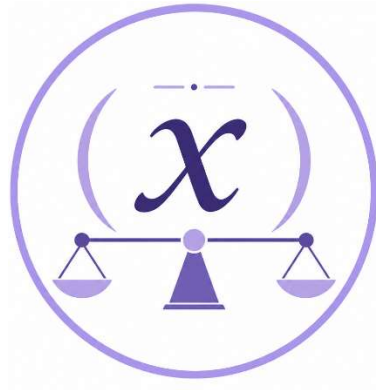
مقدمة

أبناءؤنا وبناتنا الموهوبين،
هذه هي المرحلة الأولى من أولمبياد الموهبة الوطني – المسار العلمي (نسمو)، وهي الانطلاقة الأساسية في رحلة تدريبية تهدف إلى تنمية مهارات التفكير الرياضي لدى طلاب وطالبات الصفين الأول والثاني المتوسط. تتكون المسابقة من أربع مراحل متتابة .
تهدف هذه الحقبة إلى بناء قاعدة معرفية قوية في أربعة فروع رئيسة من فروع الرياضيات هي: **التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد.**
وتتناول موضوعات مثل العدّ باستخدام أشكال فن ومبادئ العدّ الأساسية، خصائص المثلثات والزوايا، الأعداد الصحيحة والتحليل إلى العوامل، والمفاهيم الأولية في نظرية الأعداد، والأعداد النسبية والعمليات عليها. تُسهم هذه الموضوعات في تنمية قدرات التفكير المنطقي والتحليل الرياضي لدى الطلبة، وتمكنهم من التعامل مع المسائل بطرق إبداعية ومنهجية، لتكون هذه المرحلة بوابة الأولى نحو التميز في المراحل القادمة من المسابقة. مع تمنياتنا لكم بمزيد من الإبداع والتوفيق.

الفريق العلمي لأولمبياد الموهبة الوطني – المسار العلمي (نسمو)، – مسار الرياضيات



الوحدة الأولى: الجبر



1- الأعداد الصحيحة وخواصها:

1-1 مجموعات الأعداد:

مجموعة الأعداد الطبيعية: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

مجموعة الأعداد الكلية: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

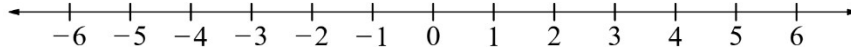
مجموعة الأعداد الصحيحة: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

يمكن تقسيم الأعداد الصحيحة إلى ثلاث مجموعات هي:

- الأعداد الصحيحة الموجبة.
- الصفر.
- الأعداد الصحيحة السالبة.

لاحظ العدد $1+$ نكتبه اختصاراً 1 بمعنى أن إشارة موجب في العادة لا تكتب ولا تنطق، بينما السالب يكتب وينطق، لاحظ أيضاً أن الصفر ليس موجباً وليس سالباً.

2-1 خط الأعداد:



يستخدم خط الأعداد لتوضيح ترتيب الأعداد الصحيحة، فكلما اتجهنا يميناً تزيد قيمة العدد الصحيح، وكلما اتجهنا يساراً تقل قيمة العدد الصحيح. مما يعني أن أي عدد موجب أكبر من أي عدد سالب، وكذلك الصفر أكبر من أي عدد سالب وأصغر من أي عدد موجب.

يقال للعددين 5 ، -5 أن كل منهما نظير (أو معكوس) جمعي للآخر، عموماً العددين الصحيحان a ، $-a$ كل منهما نظير جمعي للآخر، بينما الصفر نظير جمعي لنفسه.

لاحظ أن العدد ونظيره الجمعي يمثلهما نقطتان على خط الأعداد تبعدان البعد نفسه عن النقطة التي تمثل الصفر، ولكن في جهتين مختلفتين منه.

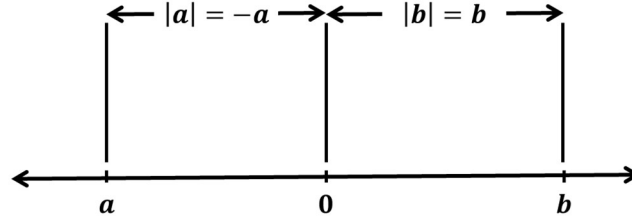


3-1 القيمة المطلقة للعدد الصحيح:

نرمز للقيمة المطلقة للعدد الصحيح a بالرمز $|a|$ ، فمثلاً:

$$|0| = 0, \quad |-5| = 5, \quad |5| = 5 \text{ وهكذا}$$

وهندسياً كل عدد صحيح يمثل بنقطة على خط الأعداد، و $|a|$ تعني المسافة بين النقطة الممثلة للعدد a ونقطة الأصل على خط الأعداد، عموماً $|a - b|$ تعني المسافة بين النقطتين الممثلتين للعددين a, b .



عندما نأخذ القيمة المطلقة لمقدار جبري وكانت إشارته $(-)$ يمكن جعله غير سالب بإزالة $(-)$.

4-1 القواعد الأساسية في الجمع والطرح والضرب والقسمة:

- خاصية الإبدال:

- $a + b = b + a$
- $ab = ba$

- خاصية التجميع:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(ab)c = a(bc)$

- خاصية التوزيع:

- $a(b + c) = (b + c)a = ab + ac$
- $a(b - c) = (b - c)a = ab - ac$

- خاصية الانغلاق:

تتحقق في الجمع والضرب والطرح فقط دون القسمة! فمثلاً لكل عددين صحيحين a, b فإن:
 $a + b$ وكذلك $a - b$ و $a \times b$ عدد صحيح بالضرورة، بينما $a \div b$ ليس بالضرورة عدد صحيح.

- خاصية المحايد الجمعي:

هو الصفر بمعنى لكل عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ فإن:

- $a + 0 = 0 + a = a$

- خاصية النظير الجمعي:

لكل عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ يوجد عدد $-a \in \mathbb{Z}$ يحققان أن:



5-1 الأسس:

تستخدم الأسس للتعبير عن حاصل ضرب متكرر، فمثلاً:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

وكذلك:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}^n$$

خواص الأسس (القوى):

إذا كان $x, y > 0$ و $m, n \in \mathbb{Z}$ فإن:

$$(1) x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$(2) \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$$

$$(3) (x^m)^n = x^{mn}$$

$$(4) (xy)^n = x^n y^n$$

$$(5) \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$(6) x^0 = 1$$

$$(7) x^{-1} = \frac{1}{x}$$

6-1 قاعدة فك الأقواس:

لأي عددين صحيحين x, y

$$(1) x + (y) = x + y, \quad x + (-y) = x - y$$

$$(2) x - (y) = x - y, \quad x - (-y) = x + y$$

$$(3) x(-y) = (-x)y = -xy, \quad (-x)(-y) = xy$$

$$(4) \begin{cases} (-1)^n = -1 & \text{عندما } n \text{ عدد صحيح فردي} \\ (-1)^n = 1 & \text{عندما } n \text{ عدد صحيح زوجي} \end{cases}$$



أمثلة:

(1) أوجد قيمة كل من:

$$a) (-2) + 12 =$$

$$b) (-3) + (-6) + 5 =$$

$$c) -3 - 11 - 31 =$$

$$d) (-5) \times (-4) =$$

$$e) (-4) \times 8 =$$

$$f) (-1) \times 2 \times 2 =$$

الحل:

$$a) (-2) + 12 = 10$$

$$b) (-3) + (-6) + 5 = [(-3) + (-6)] + 5 \\ = (-9) + 5 = -4$$

$$c) -3 - 11 - 31 = -(3 + 11 + 31) = -45$$

$$d) (-5) \times (-4) = 20$$

$$e) (-4) \times 8 = -32$$

$$f) (-1) \times 2 \times 2 = -4$$

(2) أوجد قيمة كل من:

$$a) |-2| + (-2) =$$

$$b) (-3)^2 - 3 =$$

$$c) (a^2)^3 \times a^3 =$$

$$d) \frac{x^3 \times x}{x^2} =$$

الحل:

$$a) |-2| + (-2) = 2 - 2 = 0$$

$$b) (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6$$

$$c) (a^2)^3 \times a^3 = a^6 \times a^3 = a^9$$

$$d) \frac{x^3 \times x}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

(3) بسط:

$$3a + \{-4b - [4a - 7b - (-4a - b)] + 5a\}$$

الحل:

$$\begin{aligned} 3a + \{-4b - [4a - 7b - (-4a - b)] + 5a\} &= 3a + \{-4b - [4a - 7b + 4a + b] + 5a\} \\ &= 3a + \{-4b - [8a - 6b] + 5a\} \\ &= 3a + \{-4b - 8a + 6b + 5a\} \\ &= 3a + \{2b - 3a\} \\ &= 2b + (3a - 3a) \\ &= 2b \end{aligned}$$



تدريبات:

(1) أوجد قيمة كل من:

$$a) (-4) + 9 =$$

$$b) -42 \div 7 =$$

$$c) (2)^5 =$$

$$d) (-4)^3 =$$

$$e) (-5)^2 =$$

$$f) |0| =$$

$$g) (-4) \times (-8) =$$

$$h) -8 - (-5) =$$

$$i) -1 - 4 + 7 =$$

$$j) 2 \times 4 + 6 \times 5 =$$

$$k) |-6| =$$

$$m) |-3| - |-7| =$$

(2) أوجد قيمة كل من:

$$a) a^2 \times a^5 =$$

$$b) x^7 \div x^3 =$$

$$c) (a^3)^4 =$$

$$d) (x^2)^3 \times (x^4)^5 =$$

$$e) \frac{a^3 \times a^7}{a^2 \times a^6} =$$

$$f) \frac{a^4 \times a^5}{a^3 \times a^6} =$$

(3) احسب القيم العددية لكل مما يأتي:

$$a) (-7) + (-12) - (-14) - (-15) - (-18) - (-38)$$

$$b) (-5)^2 + |-6| - (-1)^{1447}$$



أسئلة التحدي:

1. أوجد قيمة:

$$-1 - (-1)^1 - (-1)^2 - (-1)^3 - \dots - (-1)^{99} - (-1)^{100}$$

2. أكمل

$$1234 \times 9999 = \dots$$

3. بسط

$$5\{(2a - 3) - [7(4a - 1) - 20]\} - (3 - 8a)$$

4. يدور قمر صناعي دورة كاملة حول الأرض في 7 ساعات. كم مرة سيدورها ذلك القمر حول الأرض في أسبوع؟

5. تم إلقاء 6 من أحجار النرد المتماثلة. إذا كان مجموع الأرقام التي تم الحصول على أوجهها الست هو 32. ما أصغر عدد يمكن ظهوره على أحد الأوجه الست؟

6. ما قيمة:

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 100 + 101?$$



2- مجموعة الأعداد النسبية : $\mathbb{Q}$

العدد النسبي هو كل عدد يمكن كتابته في الصورة $\frac{a}{b}$ حيث a, b عددان صحيحان، $b \neq 0$ ، يسمى a البسط ويسمى b المقام.

من التعريف السابق نستنتج أن كل الأعداد الصحيحة أعداد نسبة فمثلاً:

$$0 = \frac{0}{1}, \quad -4 = \frac{-4}{1}, \quad 5 = \frac{5}{1}$$

أيضاً العدد $5\frac{1}{2}$ نسبي لأنه يمكن كتابته على الصورة:

$$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

وهكذا...

أما الأعداد العشرية المنتهية فهي نسبة فمثلاً:

$$0.3 = \frac{3}{10}, \quad 1.7 = \frac{17}{10}, \quad 2.03 = \frac{203}{100}$$

الأعداد العشرية غير المنتهية نوعان:

دورية مثل:

$$0.333 \dots = 0.\overline{3}, \quad 0.521521521 \dots = 0.\overline{521}$$

وغير دورية مثل:

$$0.345674215677589 \dots$$

لاحظ النسبة التقريبية والتي يرمز لها بالعربية π وباللغات الأخرى π وتساوي تقريباً 3.14 أو بتقريب آخر $\frac{22}{7}$ تعتبر عدد غير نسبي.



1-2 خواص الجمع والطرح في الأعداد النسبية:

نفس خواص الجمع في الأعداد الصحيحة.

ولكن مهلاً دائماً نسمع من يردد عند جمع عددين نسبيين أو طرحهما لابد من توحيد المقامات والسؤال لماذا؟
والحقيقة أن الإجابة على ذلك السؤال ليست بالسهولة بمكان! دعنا نحاول.
كلنا نعلم أن: ناتج إضافة ثلاثة جمال إلى خمسة جمال هو ثمانية جمال، وعموماً:

$$3x + 5x = 8x$$

باعتبار أن الرمز x يعبر عن نفس الشيء.

الآن لو قسمنا بيتزا مثلاً لسبعة أجزاء متساوية ومتطابقة يسمى الجزء الواحد سُبُع ويرمز له $\frac{1}{7}$.
وباعتبار سبع الواحد شيئاً في حد ذاته، الآن ما ناتج جمع سُبُعَين مع ثلاثة أسباع، ستكون الإجابة حتماً خمسة أسباع.
ولكن باستخدام الرموز يبدو الأمر مختلفاً، التعبير الرمزي سيكون

$$2\left(\frac{1}{7}\right) + 3\left(\frac{1}{7}\right) = 5\left(\frac{1}{7}\right)$$

ولأن $2\left(\frac{1}{7}\right)$ تكتب $\frac{2}{7}$ فيمكننا التعبير بشكل أبسط $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$ ، ولكن لمن ينظر للعلاقة الأخيرة تبدو أعقد لأننا جمعنا البسط لكل من الكسرين بشرط أن يكون المقام نفسه (لاحظنا أن الكثيرين يريدون لو يجمعوا المقامات أيضاً فلا تكن مثلهم).

يمكنك بمناقشة مماثلة أن تستنتج أن طرح العددين النسبيين يستلزم أيضاً توحيد المقامات.
ماذا لو كانت المقامات مختلفة؟ كيف نقوم بتوحيد المقامات؟ لنصبر قليلاً ستعرف الإجابة بعد معرفة الخاصية التالية للعدد النسبي.



2-2 خاصية التكافؤ لعددين نسبيين:

إذا كان $\frac{a}{b}$ عدد نسبي، k عدد صحيح غير الصفر فإن:

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a \div k}{b \div k}$$

بمعنى العدد النسبي يمكن كتابته بعدد غير منته من الصور فمثلاً:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{5}{10} = \dots$$

$$\frac{18}{24} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

ولكن تظل الصورة التي يكون البسط والمقام أوليان نسبياً (العددان الأوليان نسبياً هما عددان القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1) هي الصورة الأجمل وتسمى أبسط صورة لسهولة التعامل معها في العمليات الحسابية، لذا ننصحك دائماً بوضع العدد النسبي في أبسط صورة.

الآن يمكنك جمع عددين نسبيين مختلفي المقام:

مثلاً عند إجراء $\frac{2}{3} + \frac{1}{5}$. نبحث عن مضاعف مشترك للعددين 3,5 (ويفضل أن يكون أصغر)، وليس من الصعب أن نتأكد أن 15 مضاعف مشترك (أصغر) لهذين العددين. الآن نعيد كتابة الكسرين بشكل مكافئ كالتالي:

$$\frac{2 \times 5}{3 \times 5} + \frac{1 \times 3}{5 \times 3}$$

أي

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{10}{15} + \frac{3}{15}$$

وهذا يساوي $\frac{13}{15}$.

الطرح سيتم التعامل معه بنفس الطريقة.

2-3 تعريف الضرب والقسمة في الأعداد النسبية:

كيف نضرب عددين نسبيين، وما معنى ذلك؟ مثلاً عندما نسأل كم نصف العدد 100 ستجيب فوراً 50 . بدا وكأنك قسمت العدد على 2.

السؤال الآن كم ثلاثة أنصاف العدد 100، ليس من الصعب أن تجيب بأنها 150. بدا وكأنك قسمت على 2 ثم ضربت الناتج في 3 . دعنا نسأل سؤال أعقد:

كم ثلاثة أنصاف العدد $\frac{1}{7}$ ؟ سنحتاج أن نقسم العدد على 2 ثم نضرب الناتج في 3 . ولكن كم ناتج قسمة $\frac{1}{7}$ على 2 ؟ لأن

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = 2 \left(\frac{1}{14} \right)$$

وبالتالي نصفه هو $\frac{1}{14}$ (ربما يقترح أحدها أن الناتج كأننا ضربنا المقام فقط في 2)، عندما نضربه في 3 يصبح ثلاثة نسخ منه ويكتب

$$3 \left(\frac{1}{14} \right) = \frac{3}{14}$$

دعنا نصيغ ما حققناه بشكل رمزي:

$$100 \times \frac{3}{2} = 50 \times 3 = 150$$

وكذلك

$$\frac{1}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{7 \times 2} = \frac{3}{14}$$

عموماً إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

أخيراً إذا علمت أن القسمة عملية عكسية للضرب فهل يمكنك تبرير تعريف القسمة التالي:

إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$



4-2 خواص الضرب في الأعداد النسبية:

1- الانغلاق:

ناتج ضرب أي عددين نسبيين هو عدد نسبي أيضًا.

2- الإبدال:

لا يتغير ناتج الضرب عند تبديل ترتيب العوامل.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

3- التجميع:

لا يتأثر ناتج الضرب بطريقة تجميع العوامل.

4- المحايد الضربي:

العدد 1 هو المحايد الضربي لأن ضرب أي عدد نسبي في 1 لا يغير قيمته.

5- النظير الضربي:

لكل عدد نسبي $\frac{a}{b}$ خلاف الصفر يوجد عدد $\frac{b}{a}$ يسمى كل منهما نظير ضربي للآخر بحيث

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$$

6- توزيع الضرب على الجمع والطرح

5-2 كتابة العدد الدوري في صورة عدد نسبي:

مثال:

اكتب العدد الدوري $0.\overline{7}$ على صورة عدد نسبي.

الحل:

بفرض

$$x = 0.\overline{7} = 0.7777 \dots$$

بضرب الطرفين في 10 نحصل على:

$$10x = 7.7777 \dots = 7 + 0.777 \dots$$

ومنها

$$10x = 7 + x$$

بطرح x من الطرفين نحصل على

$$9x = 7$$

وأخيراً بقسمة الطرفين على 9 نجد أن:

$$x = \frac{7}{9}$$

تدريب:

اكتب العدد الدوري $0.\overline{17}$ على صورة عدد نسبي.

إرشاد: نفس خطوات المثال، ولكن ستحتاج أن تضرب في 100 بدلاً من 10.



طريقة سريعة لكتابة العدد الدوري في صورة عدد نسبي:

(البرهان ليس صعباً):

يمكننا كتابة العدد الدوري بشرط أن يكون الجزء الدوري على يمين الفاصلة مباشرة، وذلك بأن نضع الجزء الدوري في البسط والمقام عدد أرقامه كلها تسعات وعددها يساوي عدد أرقام الجزء الدوري كالتالي:

$$0.\bar{7} = \frac{7}{9} \quad , \quad 0.\bar{73} = \frac{73}{99} \quad , \quad 0.\overline{732} = \frac{732}{999} \quad , \dots$$

ويمكن تطويرها لكتابة أي عدد دوري آخر مثلاً:

$$0.1\bar{7} = 0.1 + 0.0\bar{7}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{7}{9}$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{7}{90}$$

$$= \frac{9}{90} + \frac{7}{90}$$

$$= \frac{16}{90}$$

$$= \frac{8}{45}$$



تدريبات:

1. أوجد ناتج:

$$(a) \frac{2}{5} + \frac{1}{6} =$$

$$(f) \frac{1}{9} - \frac{1}{10} =$$

$$(b) \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

$$(g) (-3) \div 4 \times 6 \div (-5) =$$

$$(c) \frac{-3}{8} \times \frac{4}{9} =$$

$$(h) \frac{-6}{35} \div \frac{2}{7} =$$

$$(d) \frac{-3}{5} - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$(i) \left(\frac{-1}{2}\right)^5 =$$

$$(e) 1 \div 3 \div 4 \div 5 =$$

2. اكتب الأعداد الدورية الآتية على صورة عدد نسبي:

$$a) 0.\bar{2}$$

$$b) 0.\overline{37}$$

$$c) 1.8\overline{23}$$

3. ادعى ماجد أن القسمة على عدد صحيح تكافئ الضرب في نظيره الضربي. هل تستطيع أن تثبت أو تنفي هذا الادعاء؟

4. زعم صالح أن بين أي عددين نسبيين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية، كما زعم أن هذه الصفة تسمى كثافة الأعداد النسبية. هل تستطيع أن تعطي مثالاً يؤيد زعم صالح، أو انف بمثال إن وُجد.

5. رتب الأعداد التالية ترتيبًا تصاعديًا:

$$-0.3, -0.23, -\frac{1}{3}$$



أسئلة التحدي:

1. كم كسر أكبر من $\frac{1}{6}$ وأقل من $\frac{1}{3}$ مقامه يساوي 15؟

2. قسم سعد العدد N على 8 فحصل على 0.25، بينما ضرب خالد العدد N في 8. كم الناتج الذي سيحصل عليه خالد؟

3. قام هيثم بالجري خارج المنزل. إذا علمت أنه قد أتم قطع $\frac{3}{5}$ النصف الثاني من مشواره. فكم نسبة ما قطعه من المشوار كاملاً؟

4. أوجد قيمة:

$$(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{9} - \frac{1}{10})$$

5. أوجد قيمة:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \dots \cdot \frac{79}{80}$$

6. لدى عادل بطاقة ائتمان بها 14 رقم، لو جمعت أي 3 أرقام متجاورة (بدءاً من اليسار) لحصلت على مجموع 20. قام بكتابة أرقام بطاقته في الجدول التالي. ما الرقم في مربع الحرف A ؟

A		7								7		4
---	--	---	--	--	--	--	--	--	--	---	--	---

7. اليوم هو عيد ميلاد كل من ليلى وابنتيها شهد وأمل. بلغت ليلى من العمر 32 عامًا، وبلغت شهد من العمر 4 سنوات، بينما بلغت أمل من العمر عامًا واحدًا. كم سيكون عمر ليلى عندما يكون عمرها مساوياً لمجموع عمري شهد وأمل؟

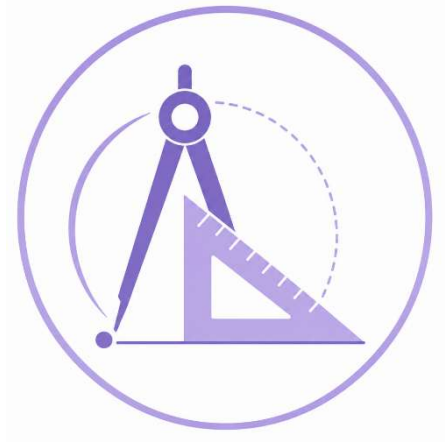
8. يعيش عمي بعيداً في مكان منعزل، ورسائله لنا تحتوي دائماً على ألغاز. في أحد رسائله حكى لنا أن هناك ثلاثة فرق محلية في منطقته وهي النمل (A)، النحل (B)، والقطط (C) تقام بينهم بطولة سنوية بحيث كل فريق يلعب الآخر مرة واحدة على الأكثر. زعم عمي أن جدول الدوري خلال هذه السنة بدا كما يلي:

الفريق	لعب	فاز	تعادل	خسر	أهداف له	أهداف عليه
A	1	0	0	1	4	2
B	2	1	1	0	2	2
C	2	1	0	1	3	1

عندما اشتكيننا من أن هذا مستحيل، اعترف بأن كل رقم كان خطأ لكنه عذر نفسه لأن كل رقم كان يحتاج إضافة 1 له أو طرح 1 منه. ابحث عن الجدول الصحيح، واشرح بوضوح كيف استنتجت التصويبات.



الوحدة الثانية: الهندسة



ملخص:

سنستعرض في هذا الملف مجموعة من المفاهيم الهندسية الأساسية مثل أنواع الزوايا، والمستقيمات المتوازية والقاطع، ثم أنواع المثلثات وخصائصها، وأخيراً خصائص المضلعات الرباعية

1- النقاط، المستقيمات، والزوايا:

تبدأ الهندسة بثلاثة مفاهيم بسيطة: النقاط، والمستقيمات، والزوايا. إنها بسيطة جداً بحيث تراها كل يوم، لكنها قوية لدرجة أنها تستطيع بناء عوالم كاملة. فلنبدأ بهدوء ونتعرف عليها.

تعريف:

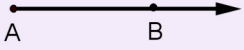
الخط المستقيم:



يتكون المستقيم من عدد غير منته من النقاط ويتم تمثيله كما في الشكل:

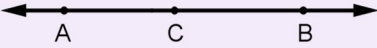
وبما أنه يحتوي النقطتين A و B فيمكن التعبير عنه على النحو $\overleftrightarrow{AB}$ أو يمكن تسميته بأحد حروف اللغة، مثل l .

الشعاع:



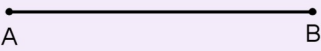
الشعاع (أو نصف المستقيم) هو عدد غير منته من النقاط لها نقطة بداية وليس لها نقطة نهاية. والشعاع الذي يبدأ بالنقطة A باتجاه النقطة B يرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$.

لاحظ أنه إذا كانت النقطة C واقعة بين النقطتين A و B على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإننا نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$ متعاكسان.

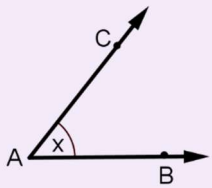


القطعة المستقيمة:

إذا كانت A و B نقطتين على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإن القطعة المستقيمة بين النقطتين A و B يرمز لها بالرمز $\overline{AB}$ وهي مجموعة النقاط الواقعة بين A و B بما في ذلك النقطتين A و B . تسمى النقطتان A و B طرفي القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

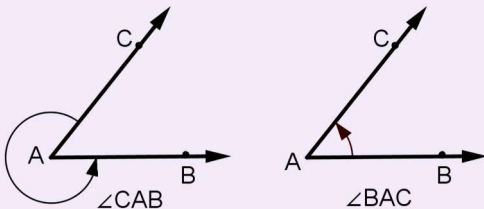


الزوايا وقياسها:



تُعرف الزاوية على أنها اتحاد شعاعين يشتركان في نقطة البداية. تسمى نقطة البداية رأس الزاوية

ويسمى الشعاعان ضلعي الزاوية. فمثلاً، على الشكل زاوية رأسها A وضلعاها هما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. لاحظ وجود زاوية أخرى ضلعاها $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$. متى شئنا التفريق بين هاتين الزاويتين سنتقيد بالحركة عكس عقارب الساعة فنسمي مثلاً الزاوية المرسومة في الشكل $\angle BAC$ ، ونسمي الأخرى $\angle CAB$.



بعض الزوايا الخاصة:

الزاوية الحادة

هي الزاوية التي قياسها أصغر من 90° .

الزاوية القائمة

هي الزاوية التي قياسها يساوي 90° وعادة تمثل الزاوية القائمة كما بالشكل المجاور.

الزاوية المنفرجة

هي الزاوية التي يزيد قياسها عن 90° .

الزاوية المستقيمة

هي الزاوية التي قياسها 180° . كما بالشكل المجاور.

الزاويتان المتتامتان

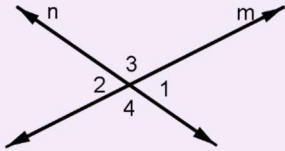
يقال عن زاويتين أنهما متتامتان إذا كان مجموع قياسيهما يساوي 90° .

الزاويتان المتكاملتان

تسمى الزاويتان متكاملتين متى ما كان مجموع قياسيهما يساوي 180° .

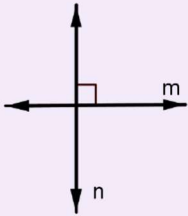
الزاويتان المتجاورتان

هما زاويتان في المستوى تشتركان في ضلع والرأس، ولكنهما لا تشتركان بنقاط داخلية.



الزاويتان المتقابلتان بالرأس

إذا تقاطع المستقيمان m و n كما هو مبين في الشكل فإنه ينشأ عن ذلك عدد من الزوايا. نقول إن الزاويتين 1 و 2 (أو الزاويتين 3 و 4) متقابلتان بالرأس. وإذا كانت إحدى الزوايا الناتجة عن هذا التقاطع قائمة (ومن ثم جميع الزوايا الأخرى قائمة) فإننا نقول إن المستقيمين متعامدان ونكتب $m \perp n$. ويمكننا أن نستنتج هنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي 360° .

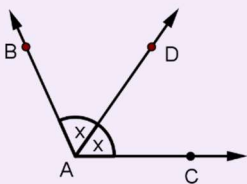


مُنَصَّف الزاوية:

هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متساويتين.

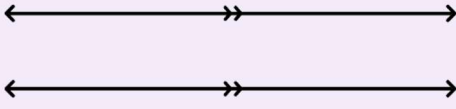
ونقول أن $\overrightarrow{AD}$ هو منصف الزاوية $\angle BAC$

إذا وقعت D داخل الزاوية $\angle BAC$ وكان $\angle BAD = \angle DAC$





المستقيمان المتوازيان:



هما المستقيمين غير المتقاطعين أو متخالفين،
المستقيمان المتوازيان ($\parallel$) لا يتقاطعان ويقعان في مستوى واحد،
أما المتخالفان فهما لا يتقاطعان ولا يقعان في مستوى واحد .

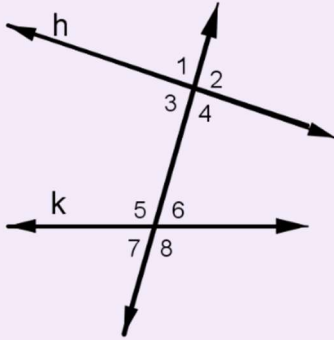
المستقيم القاطع:

هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى واحد.

إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين فستكون لدينا أزواج الزوايا التالية:

الزوايا المتبادلة داخلياً:

هما زاويتان غير متجاورتين وفي جهتين مختلفتين من المستقيم القاطع.
في الشكل المجاور يوجد زوجان من الزوايا التبادلية داخلياً هما $\angle 3$ و $\angle 6$ و $\angle 4$ و $\angle 5$.



الزوايا المتبادلة خارجياً:

هما زاويتان خارجيتان لهما رأسان مختلفان ويقعان على جهتين مختلفتين
من القاطع. في الشكل يوجد زوجان من الزوايا التبادلية خارجياً هما $\angle 1$ و $\angle 8$ و $\angle 2$ و $\angle 7$.

الزوايا المتحالفة داخلياً:

هما زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع $\angle 3$ و $\angle 5$ وكذلك $\angle 4$ و $\angle 6$.

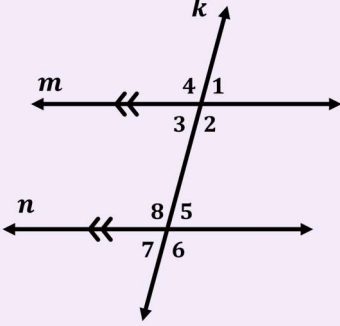
الزوايا المتناظرة:

هما زاويتين في جهة واحدة من القاطع أحدهما داخلية والأخرى خارجة.
في الشكل المجاور الزوايا المتناظرة هي $\angle 1$ و $\angle 5$ ، $\angle 2$ و $\angle 6$ ، $\angle 3$ و $\angle 7$ ، $\angle 4$ و $\angle 8$.



مسلمة (1):

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.
أي أنه إذا كان $m \parallel n$ وكان k قاطع لهما فإن:
 $(\angle 1 = \angle 5)$, $(\angle 2 = \angle 6)$, $(\angle 3 = \angle 7)$ و $(\angle 4 = \angle 8)$.



مسلمة (2):

إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت زاويتين متناظرتين متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.

أي أنه إذا كان المستقيم k يقطع مستقيمين وليكونا m, n وكان كذلك $(\angle 1 = \angle 5)$ أو $(\angle 2 = \angle 6)$ أو $(\angle 3 = \angle 7)$ أو $(\angle 4 = \angle 8)$ فإن $m \parallel n$.
بالمثل بالنسبة للعلاقة بين الزوايا الداخلية أو المتبادلة داخليا أو خارجيا.

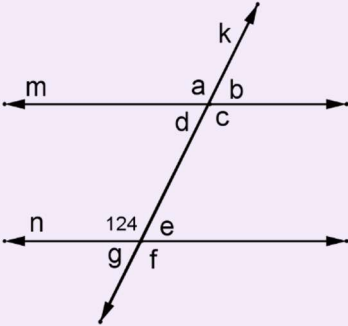
مثال:

على الشكل المجاور:

إذا كان المستقيم m يوازي المستقيم n ويقطعهما المستقيم k ولدينا قياس زاوية واحدة يساوي 124° .

فأوجد قياس الزوايا:

$\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e, \angle f, \angle g$



الحل:

بما أن المستقيم m يوازي المستقيم n ويقطعهما المستقيم k .
إذاً:

$\angle a = 124^\circ$	بالتناظر.
$\angle b = 56^\circ$	متجاورتان متكاملتان
$\angle c = 124^\circ$	بالتقابل بالرأس
$\angle d = 56^\circ$	متكاملتان وفي جهة واحدة من القاطع.
$\angle e = 124^\circ$	بالتناظر مع $\angle b$ أو بالتبادل مع $\angle d$
$\angle f = 124^\circ$	بالتناظر مع $\angle c$
$\angle g = 56^\circ$	بالتناظر مع $\angle d$



تدريبات:

(1) على الشكل المجاور وباستخدام المعلومات الموضحة عليه، أوجد المستقيمات التي يجب ان تكون متوازية

(إن وجدت) في الحالات التالية:

$\angle 1 \cong \angle 4$ (a)

$m\angle 2 \cong m\angle 10$ (b)

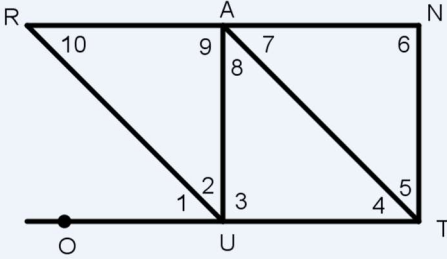
$m\angle 5 \cong m\angle 7$ (c)

$\angle 5 \cong \angle 8$ (d)

$m\angle 6 = m\angle 9 = 90^\circ$ (e)

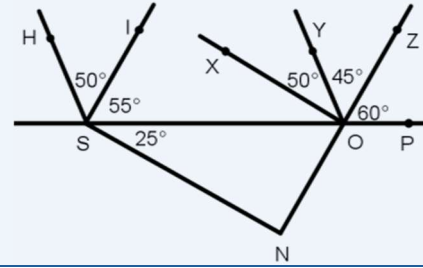
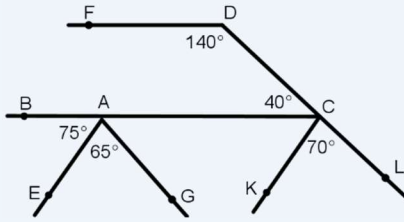
$m\angle 6 = m\angle 3 = 90^\circ$ (f)

$m\angle 7 = m\angle 10 = m\angle 1$ (g)

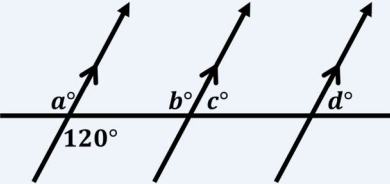


(2) على الشكلين التاليين أوجد أزواج المستقيمات المتوازية، ثم حدد الزوايا المتطابقة أو المتكاملة التي

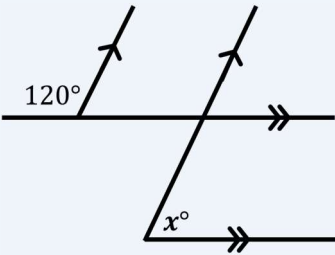
استخدمتها لذلك.



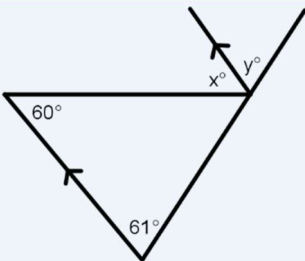
(3) في الشكل المجاور، أوجد قياس $\angle d$.

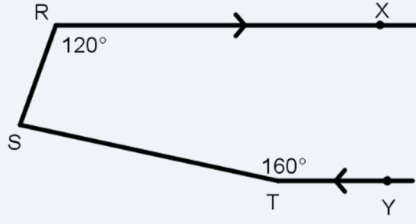


(4) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .

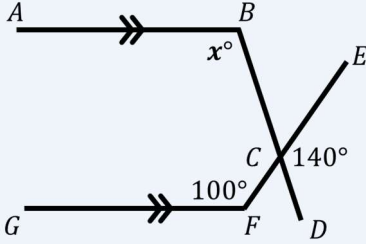


(5) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x, y .

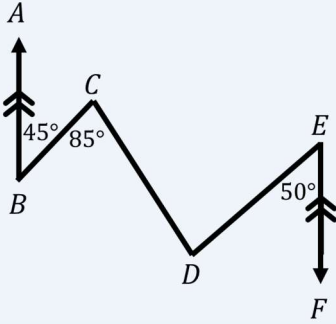




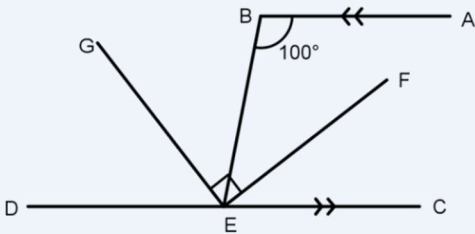
(6) على الشكل المجاور: أوجد قياس $\angle RST$
(إرشاد: مستقيم يمر بالنقطة S يوازي $(\overline{RX}, \overline{TY})$).



(7) على الشكل المجاور: لدينا $AB \parallel GF$ ،
 $\angle ECD = 140^\circ$ ، $\angle GFC = 100^\circ$
أوجد قيمة x



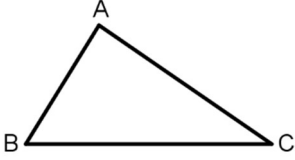
(8) على الشكل: لدينا $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{EF}$
 $\angle ABC = 45^\circ$ ، $\angle BCD = 85^\circ$ ، $\angle DEF = 50^\circ$
أوجد قياس $\angle CDE$



(9) على الشكل المجاور:
 $AB \parallel DC$ ، $\angle B = 100^\circ$ ، EF ينصف $\angle BEC$ ، EF عمودي على EG .
أوجد قياس كل من $\angle BEG$ ، $\angle DEG$

2- المثلثات:

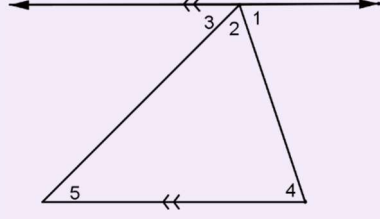
المثلثات من المفاهيم الأساسية في الهندسة وهي حالة خاصة من المضلعات التي سندرسها لاحقاً. المثلث نرسم له عادة بالرمز $\triangle$ وهو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة تتحدد بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. تسمى النقاط A, B, C رؤوس المثلث والقطع المستقيمة $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ أضلاع المثلث وزوايا المثلث هي $\angle A, \angle B, \angle C$.



تصنف المثلثات حسب أضلاعها وحسب زواياها:

المثلث الحاد الزوايا	المثلث القائم الزاوية	المثلث المنفرج الزاوية
هو المثلث الذي تكون جميع زواياه حادة أي أقل من 90 درجة.	هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة (تساوي 90 درجة).	هو المثلث الذي إحدى زواياه منفرجة (أكبر من 90 درجة).
يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة الوتر ويسمى كل من ضلعي القائمة ساقاً		
المثلث المختلف الأضلاع	المثلث المتساوي الساقين	المثلث المتطابق الأضلاع
هو المثلث الذي أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة.	هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متساويان	هو المثلث الذي تكون جميع أضلاعه متساوية
الزاويتان المقابلتان للضلعين المتساويين متساويتان أيضاً. يسمى كل من الضلعين المتساويين ساقاً ويسمى الضلع الثالث قاعدة المثلث كما تسمى الزاوية المقابلة للقاعدة بزاوية الرأس وتسمى كل من الزاويتين المتساويتين بزاوية القاعدة. في هذه الحالة تكون جميع زواياه متساوية وقياس كل منها 60°		

نظرية:

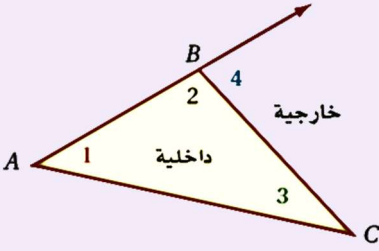


مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية تساوي 180°

لإثبات ذلك: نرسم مستقيم يوازي أي ضلع في مثلث ويمر بالرأس المقابلة. وبما أن مجموع قياسات الزوايا $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ يساوي 180° ، وبما أن $\angle 1 = \angle 5$ $\angle 3 = \angle 4$ (بالتبادل). إذن مجموع قياسات الزوايا $\angle 2, \angle 4, \angle 5$ تساوي 180° .

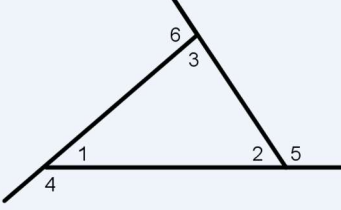
ملاحظات:

- إذا مددنا أحد أضلاع المثلث فتسمى الزاوية التي تنشأ عن ذلك زاوية خارجة.
- الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع زوايا المثلث الداخلة عدا المجاورة لها.
- إذا طبقت زاويتين في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثالثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر.
- إذا تساوت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متساويان والعكس صحيح.
- في أي مثلث لا يمكن أن يكون هناك أكثر من زاوية قائمة أو منفرجة.
- الزاويتان الحادتان في المثلث القائم متتامتان (مجموعهما 90°).



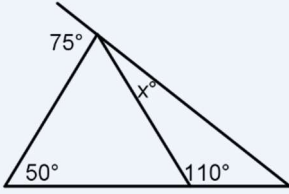
تدريبات:

(1) باستخدام الشكل المجاور أكمل:

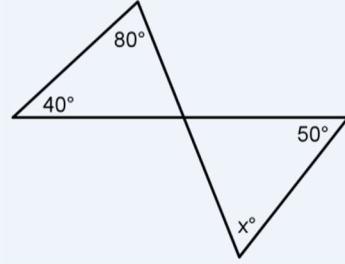


- (a) إذا كان $m\angle 1 = 40^\circ$, $m\angle 2 = 60^\circ$ فإن: $m\angle 6 =$ _____
 (b) إذا كان $m\angle 1 = 45^\circ$, $m\angle 3 = 70^\circ$ فإن: $m\angle 5 =$ _____
 (c) إذا كان $m\angle 2 = 50^\circ$, $m\angle 3 = 65^\circ$ فإن: $m\angle 4 =$ _____
 (d) إذا كان $m\angle 4 = 135^\circ$, $m\angle 2 = 60^\circ$ فإن: $m\angle 3 =$ _____
 (e) إذا كان $m\angle 5 = 120^\circ$, $m\angle 1 = 40^\circ$ فإن: $m\angle 3 =$ _____
 (f) $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 =$ _____

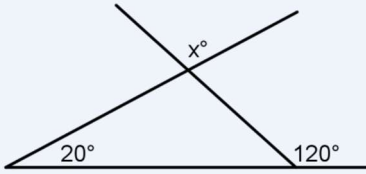
(3) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .



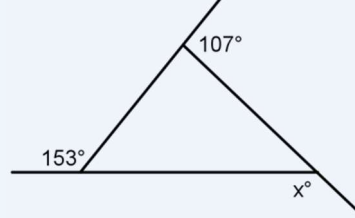
(2) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .



(5) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .

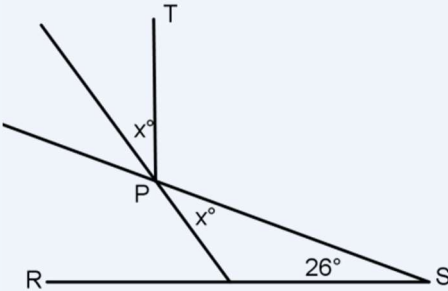


(4) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x .



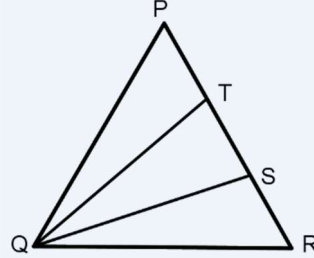
(7) على الشكل المجاور: شعاع من النور يخرج من النقطة S

لينعكس عند النقطة P ليخرج في اتجاه النقطة T بحيث $\overrightarrow{RS}$ عمودي على $\overrightarrow{PT}$.
أوجد قيمة x .



(6) على الشكل المجاور: QPR مثلث متطابق الأضلاع

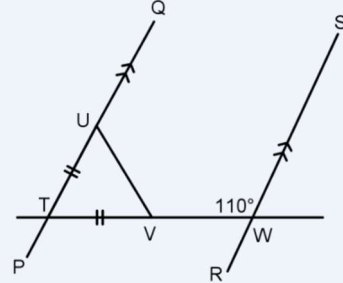
QT, QS تقسم $\angle PQR$ لثلاثة أجزاء متساوية.
أوجد قياس $\angle QTP$.





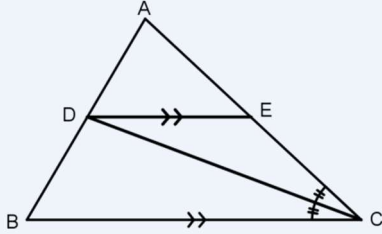
(8) على الشكل المجاور:

$\angle SWV = 110^\circ$ ، $TU = TV$ ، $\overline{RS} \parallel \overline{PQ}$
أوجد $\angle QUV$

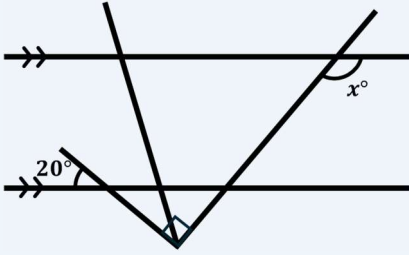


(9) على الشكل المجاور: CD ينصف $\angle ACB$ ،

$DE \parallel BC$ ، $\angle B = 70^\circ$ ، $\angle ACB = 40^\circ$
أوجد قياس كل من $\angle EDC$ ، $\angle BDC$

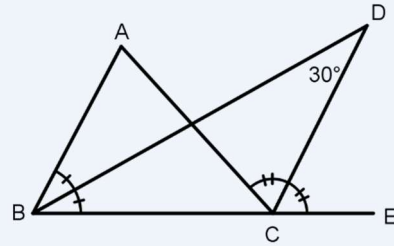


(11) على الشكل: أوجد قيمة x .



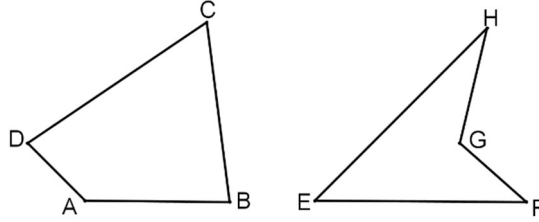
(10) على الشكل المجاور: منصف $\angle ABC$ ، ومنصف

$\angle ACE$ يتقاطعان في نقطة D . فإذا كان $\angle BDC = 30^\circ$.
أوجد قياس من $\angle A$



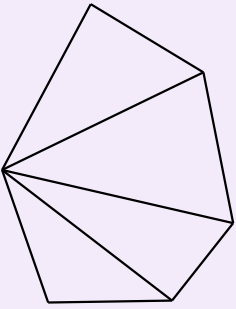
3- المضلعات:

المضلع هو شكل مغلق يمكن رسمه بوصل قطع مستقيمة في نهاياتها، تسمى كل من النقاط رأساً وكل من القطع المستقيمة ضلعاً. زوايا المضلع هي الزوايا التي تنشأ عن تقاطع أضلاع متجاورة. أقطار المضلع هي القطع المستقيمة بين أي رأسين غير متتاليين. يكون المضلع محدباً إذا كان قياس أي زاوية داخلية له أقل من 180° كما بالشكل $ABCD$ ، بينما يكون مقعراً إذا كانت إحدى زواياه الداخلية أكبر من 180° كما بالشكل $EFGH$.



وعليه يمكننا أن نقول إن المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع والرباعي هو مضلع مكون من أربعة أضلاع والخماسي هو مضلع مكون من خمسة أضلاع والسداسي هو مضلع مكون من ستة أضلاع وهكذا.

ملاحظات:



- مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي $(n - 2) \times 180^\circ$. ولإثبات ذلك اختر أي رأس من رؤوس المضلع وارسم جميع أقطاره من هذه النقطة. إن ذلك يقسم المضلع إلى $n - 2$ من المثلثات. وبهذا فإن مجموع زوايا المضلع الداخلية هو مجموع هذه المثلثات وهذا بدوره يساوي $(n - 2) \times 180^\circ$.
- المضلع المنتظم هو مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وقياس جميع زواياه متساو. ولذا، إذا كان عدد أضلاع (زوايا) المضلع المنتظم هو n فإن قياس كل من زواياه الداخلية يساوي:

$$\frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$$

- مجموع الزوايا الخارجية لمضلع منتظم $= 360^\circ$

تدريبات:

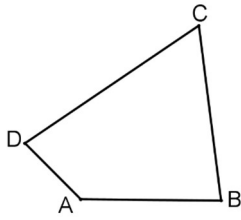
(1) أوجد مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه:

15 (a , 16 (b , 17 (c ,

(2) أوجد قياس الزاوية الداخلية لكل مضلع منتظم من:

15 ضلعاً (a , 16 ضلعاً (b , 17 ضلعاً (c ,

4- الرباعيات:



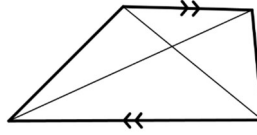
الرباعي هو مضلع مكون من أربعة رؤوس. أي أن الرباعي $ABCD$ هو اتحاد القطع المستقيمة $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ حيث أي ثلاث نقاط يجب ألا تكون على استقامة واحدة ومجموع قياسات زواياه يساوي 360° .

ويمكننا أن نلخص بعض خواص الاشكال الرباعية الخاصة فيما يلي:

المرجع	المعين	المستطيل	متوازي الأضلاع	الشكل
هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان	هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان ومن ثم فإن جميع أضلاعه متساوية.	هو متوازي أضلاع إحدى زواياه (ومن ثم جميع زواياه) قائمة.	متوازي الأضلاع هو رباعي محدب فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان	التعريف
جميع أضلاعه متساوية	جميع أضلاعه متساوية	كل ضلعين متقابلين متساويين	كل ضلعين متقابلين متساويين	الأضلاع
جميع زواياه متطابقة وكل منها يساوي 90°	كل زاويتين متقابلتين متطابقتين	جميع زواياه متطابقة وكل منها يساوي 90°	كل زاويتين متقابلتين متطابقتين	الزوايا
- ينصف كل منهما الآخر. - متساويان في الطول - متعامدان. - القطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما.	- ينصف كل منهما الآخر. - متعامدان. - القطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما.	- ينصف كل منهما الآخر. - متساويان في الطول	ينصف كل منهما الآخر	القطران
طول الضلع $\times$ نفسه	القاعدة $\times$ الارتفاع	الطول $\times$ العرض	القاعدة $\times$ الارتفاع	المساحة
طول الضلع $\times 4$	طول الضلع $\times 4$	(الطول + العرض) $\times 2$	مجموع أطوال الأضلاع	المحيط

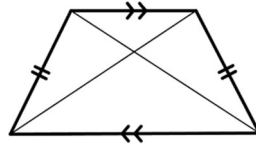
ك تعريف 4-1

شبه المنحرف، هو شكل رباعي فيه ضلعين متقابلين فقط متوازيين.



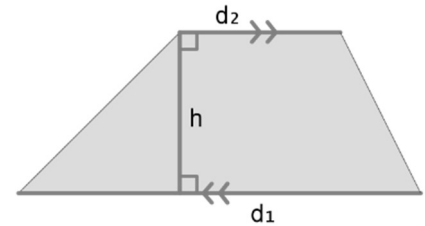
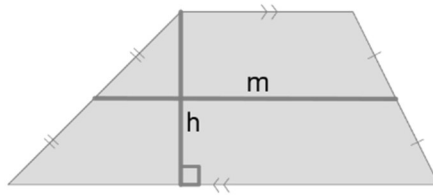
تعريف 4-2

إذا تطابق الضلعين الغير متوازيين (الساقان) في شبه المنحرف فإنه يسمى شبه منحرف متطابق الضلعين (الساقين) ويتساوى قطراه وتتساوى زاويتي قاعدته.



نظرية 4-1

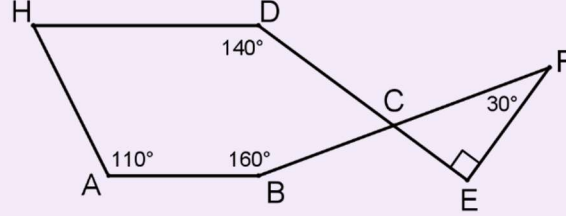
مساحة شبه المنحرف $A = \frac{1}{2} h(d_1 + d_2)$
أو القاعدة المتوسطة في الارتفاع. ($A = h \cdot m$)





أمثلة:

(1) على الشكل أدناه: لدينا المستقيمان DE, BF يتقاطعان في نقطة C ، بحيث أن EF عمودي على DE ،
 $\angle HAB = 110^\circ, \angle ABC = 160^\circ, \angle CFE = 30^\circ, \angle HDC = 140^\circ$. أثبت أن $AB \parallel HD$.



الحل:

في $\triangle FEC$ القائم في E ، بما أن $\angle CFE = 30^\circ$ إذن

$$\angle FCE = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 60^\circ$$

إذن بالتقابل بالرأس

$$\angle DCB = 60^\circ$$

وبما أن الشكل $ABCDH$ شكلا خماسيا، إذن مجموع قياسات زواياه الداخلية:

$$\begin{aligned} &= (n - 2) \times 180^\circ \\ &= (5 - 2) \times 180^\circ \\ &= 3 \times 180^\circ \\ &= 540^\circ \end{aligned}$$

إذن

$$\begin{aligned} \angle H &= 540^\circ - (110^\circ + 160^\circ + 60^\circ + 140^\circ) \\ \angle H &= 540^\circ - 470^\circ \\ \angle H &= 70^\circ \end{aligned}$$

وبما أن

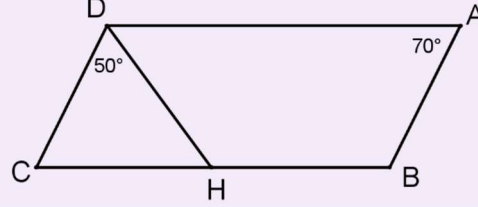
$$\angle H + \angle A = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$$

وهما زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع AH ، إذن

$$AB \parallel HD$$



(2) على الشكل: $ABCD$ متوازي أضلاع فيه H تقع على الضلع BC ، $\angle A = 70^\circ$ ، $\angle CDH = 50^\circ$ ،
أوجد قياس $\angle BHD$.

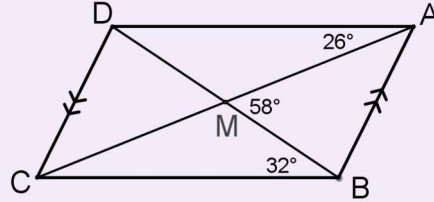


الحل:

بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع
إذن $\angle C = \angle A = 70^\circ$ (زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع)
وبما أن $\angle DHB$ خارجة عن المثلث DHC ، إذن

$$\begin{aligned}\angle DHB &= \angle C + \angle CDH \\ \angle DHB &= 50^\circ + 70^\circ \\ \angle DHB &= 120^\circ\end{aligned}$$

(3) على الشكل: $ABCD$ رباعي تقاطع قطراه M ، $AB \parallel CD$ ، $\angle AMB = 58^\circ$ ، $\angle MBC = 32^\circ$ ،
 $\angle CAD = 26^\circ$. أثبت أن $ABCD$ متوازي أضلاع.



الحل:

بما أن $\angle AMB$ خارجة عن المثلث CMB ، إذن

$$\angle AMB = \angle MBC + \angle MCB$$

إذن

$$58^\circ = 32^\circ + \angle MCB \Rightarrow \angle MCB = 26^\circ$$

إذن

$$\angle CAD = \angle MCB \text{ وهما في وضع تبادل.}$$

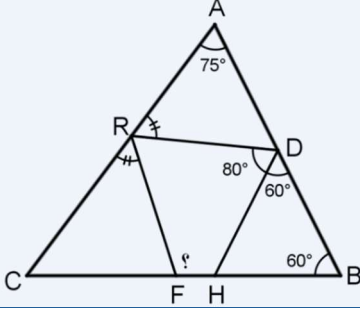
إذن $AD \parallel BC$ ، وبما أن $AB \parallel CD$

إذن $ABCD$ متوازي أضلاع.

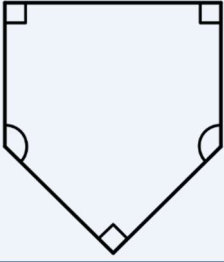
تدريبات:

(1) على الشكل:

$\angle ARD = \angle FRC$, $\angle BDH = \angle ABC = 60^\circ$, $\angle HDR = 80^\circ$, $\angle BAC = 75^\circ$ فيه $\triangle ABC$
أوجد قياس $\angle HFR$.



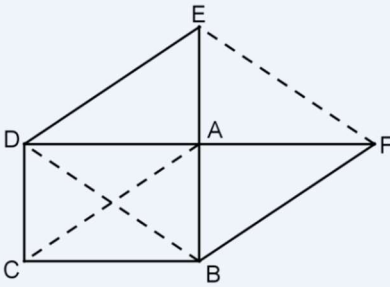
(2) في لعبة البيسبول الأمريكية تمثل قاعدة اللعب شكلا خماسيا (كما بالشكل المجاور)
يتكون من ثلاثة زوايا قائمة وزاويتين متطابقتين
أوجد قياس هاتين الزاويتين.



(3) سطحا معين وشبه منحرف متساويان في المساحة فإذا كان طول ضلع المعين 10 وطول القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف 15 فأوجد النسبة بين ارتفاعيهما.
(القاعدة المتوسطة في شبه المنحرف هي القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف).

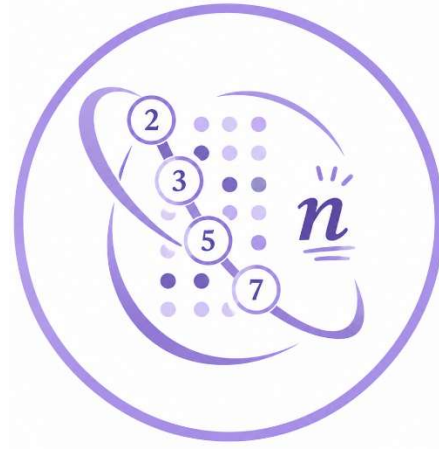
(4) شبه منحرف طول إحدى قاعدتيه المتوازيتين يساوي 3 أمثال طول القاعدة الأخرى
فإذا كان ارتفاعه يساوي طول قاعدته المتوسطة ومساحته 100. أوجد طول قاعدتيه المتوازيتين.

(5) على الشكل أدناه: $ABCD$ مستطيل، $ACDE$ ، $ACBF$ متوازي أضلاع أثبت أن $EF \parallel BD$.





الوحدة الثالثة: نظرية الاعداد





مقدمة في نظرية الأعداد: قابلية القسمة والتحليل إلى العوامل الأولية

هذا الملف عبارة عن دليل تمهيدي للعمليات الأساسية في قابلية قسمة الأعداد الصحيحة والتحليل إلى العوامل الأولية. سنستعرض مجموعة من قواعد قابلية القسمة العملية، ونعرّف الأعداد الأولية والمؤلفة، ونؤسس لأهم نظرية في علم الأعداد: النظرية الأساسية في الحساب. أخيرًا، سنطبق هذه المفاهيم لنوضح كيف أن التحليل إلى عوامل هو أداة قوية لتبسيط التعبيرات الرياضية المعقدة.

1- قواعد قابلية القسمة:

قبل الخوض في موضوع التحليل، من المفيد أن يكون لدينا مجموعة من القواعد لتحديد ما إذا كان عدد ما يقبل القسمة على عدد آخر بسرعة. بشكل رسمي، نقول إن العدد الصحيح a يقسم العدد الصحيح b ، وتُكتب $a \mid b$ ، إذا كان هناك عدد صحيح k بحيث $b = ak$.

قابلية القسمة على 2

يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان رقمه الأخير زوجيًا (0, 2, 4, 6, 8).

مثال: العدد 538 يقبل القسمة على 2 لأن رقمه الأخير هو 8.

قابلية القسمة على 3

يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3.

مثال: العدد 741 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه $(1 + 4 + 7 = 12)$ ، و12 يقبل القسمة على 3.

قابلية القسمة على 4

يقبل العدد القسمة على 4 إذا كان العدد المكون من رقميه الأخيرين يقبل القسمة على 4.

مثال: العدد 1,824 يقبل القسمة على 4 لأن العدد 24 يقبل القسمة على 4.

قابلية القسمة على 5

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان رقمه الأخير 0 أو 5.

مثال: العدد 9,875 يقبل القسمة على 5 لأن رقمه الأخير هو 5.

قابلية القسمة على 6

يقبل العدد القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على كل من 2 و 3.

مثال: العدد 432 يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 (الرقم الأخير 2) وعلى 3 (مجموع الأرقام 9).

قابلية القسمة على 9

يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

مثال: العدد 2,853 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه 18، و18 يقبل القسمة على 9.

قابلية القسمة على 10

يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان رقمه الأخير 0.

مثال: العدد 12,340 يقبل القسمة على 10.



قابلية القسمة على 11

يقبل العدد القسمة على 11 إذا كان المجموع التبادلي (طرح الخانات في الأماكن الفردية من الخانات في الأماكن الزوجية) لأرقامه يقبل القسمة على 11.

مثال: لنأخذ العدد 54,384. المجموع التبادلي هو $5 - 4 + 3 - 8 + 4 = 0$. بما أن 0 يقبل القسمة على 11، فإن العدد 54,384 يقبل القسمة على 11.

مثال:

أمامك ثلاثة أعداد. كل عدد منها يقبل القسمة على أحد الأعداد التالية: 7، 9، أو 11. صل كل عدد بالقاسم المناسب. الأعداد هي:

- 1) 819045
- 2) 792143
- 3) 16926

الحل:

لحل هذه المسألة، سنقوم بتطبيق قواعد قابلية القسمة على كل عدد لتحديد المقسوم عليه الصحيح.

(1) اختبار العدد 819,045

سنبدأ باختبار قابلية القسمة على 9 لأنها الأسهل.

قاعدة قابلية القسمة على 9: يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9. مجموع خانات العدد 819045:

$$8 + 1 + 9 + 0 + 4 + 5 = 27$$

النتيجة: بما أن 27 تقبل القسمة على 9، فإن العدد 819,045 يقبل القسمة على 9.

إذًا، العدد 819045 يقبل القسمة على 9.

(2) اختبار العدد 792143

هذا العدد يبدو معقدًا، لذا قاعدة قابلية القسمة على 11 هي مرشح جيد للاختبار.

قاعدة قابلية القسمة على 11: يقبل العدد القسمة على 11 إذا كان المجموع التبادلي لأرقامه يقبل القسمة على 11.

التطبيق: لنحسب المجموع التبادلي لأرقام العدد 792143:

$$3 - 4 + 1 - 2 + 9 - 7 = -1 + 1 - 2 + 9 - 7 = 0 - 2 + 9 - 7 = -2 + 2 = 0$$

النتيجة: بما أن 0 يقبل القسمة على 11، فإن العدد 792143 يقبل القسمة على 11.

إذًا، العدد 792143 يقبل القسمة على 11.

بما أننا وجدنا العددين الذين يقبلان القسمة على 9 و 11، إذاً يجب أن يكون العدد الأخير 16926 هو الذي يقبل القسمة على 7

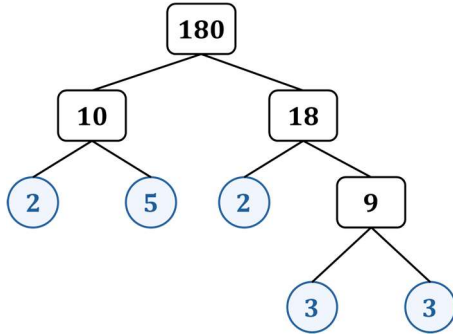
2- الأعداد الأولية:

جميع الأعداد الصحيحة الأكبر من 1 هي إما أعداد أولية أو أنها مركبة من حاصل ضرب أعداد أولية.
تعريف (العدد الأولي): العدد الأولي هو عدد صحيح أكبر من 1 وقواسمه الموجبة الوحيدة هي 1 ونفسه.
 أمثلة على الأعداد الأولية: (2,3,5,7,11,47,97)
تعريف (العدد المركب): العدد المركب هو عدد صحيح أكبر من 1 وليس أوليًا.
 أمثلة على الأعداد المؤلفة: (4,9,15,27,180,588)

النظرية الأساسية في الحساب: كل عدد صحيح أكبر من 1 هو إما عدد أولي، أو يمكن تمثيله كحاصل ضرب أعداد أولية، وهذا التمثيل فريد باستثناء ترتيب العوامل.

3- طرق التحليل إلى العوامل الأولية:

طريقة شجرة العوامل



مثال: (تحليل العدد 180) نحلل العدد 180 إلى أن نصل إلى

عوامله الأولية:

- لاحظ أن العدد 180 هو عبارة عن ضرب 10 و 18.
- نحلل الـ 18 كحاصل ضرب 9 و 2. والـ 10 كحاصل ضرب 2 و 5.
- نحلل الـ 9 كحاصل ضرب 3 و 3.
- إذا تحليل الـ 180 هو عبارة عن ضرب الأعداد الأولية $2^2 \times 3^2 \times 5$.

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

طريقة القسمة المتكررة

مثال: (تحليل العدد 588) نقسم العدد على اقل عدد اولي يقسمه الى ان نصل الى 1. ثم نعد القواسم:

أحياناً، نمثل طريقة القسمة المتكررة بقسمة العمود لتسهيل الحسابات: $ \begin{array}{r l} 2 & 588 \\ 2 & 294 \\ 3 & 147 \\ 7 & 49 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} $	$ \begin{aligned} 588 \div 2 &= 294 \\ 294 \div 2 &= 147 \\ 147 \div 3 &= 49 \\ 49 \div 7 &= 7 \\ 7 \div 7 &= 1 \end{aligned} $ إذا: $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$
---	---

4- كيف يسهل التحليل الحسابات:

تكمّن القوة الحقيقية للتحليل في قدرته على كشف البنية الداخلية للأعداد، مما يمكننا من تبسيط العمليات الحسابية التي تبدو معقدة، مثل القسمة والجمع والطرح.

تبسيط القسمة (الكسور)

عند قسمة عددين كبيرين (أو تبسيط كسر)، فإن البحث عن العوامل المشتركة بينهما هو الطريقة المثلى.

مثال (بسط الكسر):

$$\frac{396}{924}$$

الحل :

نحلل البسط والمقام باستعمال أحد الطرق لنحصل على:

$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11, \quad 924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$$

إذا، عند قسمة العددين يمكننا اختزال العوامل الأولية المشتركة لنحصل على:

$$\frac{396}{924} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{2^2}{2^2} \times \frac{3^2}{3} \times \frac{1}{7} \times \frac{11}{11} = \frac{3}{7}$$



تدريبات:

(1) ما نتيجة العملية الحسابية $(20 + 18) \div (20 - 18)$ ؟				
(A) 18	(B) 19	(C) 20	(D) 34	(E) 36
(2) أي من الأرقام التالية هو الأقرب إلى ناتج العملية $\frac{17 \times 0.3 \times 20.16}{999}$ ؟				
(A) 0.01	(B) 0.1	(C) 1	(D) 10	(E) 100
(3) يعلم مصطفى أن $1234321 = 1111 \times 1111$. ما هي النتيجة التي يحصل عليها عند حساب 1111×2222 ؟				
(A) 3456543	(B) 2345432	(C) 2234322	(D) 2468642	(E) 4321234
(4) ما هو الرقم الذي يجب أن يحل محل النجمة (*) لتكون المعادلة التالية صحيحة $2 \cdot 18 \cdot 14 = 6 \cdot * \cdot 7$ ؟				
(A) 8	(B) 9	(C) 10	(D) 12	(E) 15
(5) أي الكسور التالية أصغر من $\frac{2}{3}$ ؟				
(A) $\frac{19}{8}$	(B) $\frac{20}{9}$	(C) $\frac{21}{10}$	(D) $\frac{22}{11}$	(E) $\frac{23}{12}$
(6) أي العبارات التالية صحيحة؟				
(A) $\frac{4}{1} = 1.4$	(B) $\frac{5}{2} = 2.5$	(C) $\frac{6}{3} = 3.6$	(D) $\frac{7}{4} = 4.7$	(E) $\frac{8}{5} = 5.8$
(7) 2016 ساعة كم تساوي من الأسابيع؟				
(A) 6	(B) 8	(C) 10	(D) 12	(E) 16
(8) لدى حمزة 20 ريالاً، وكل من أشقائه الأربعة لديه 10 ريالاً. كم يجب على حمزة أن يعطي كل شقيق من أشقائه حتى يتساوى المبلغ عند كل منهم؟				
(A) 2	(B) 4	(C) 5	(D) 8	(E) 10
(9) سدس الجمهور في مسرح للأطفال هم من البالغين، والباقي أطفال. خمساً $\left(\frac{2}{5}\right)$ الأطفال هم فتيات. ما هو الكسر الذي يمثل الأولاد من إجمالي الجمهور؟				
(A) $\frac{1}{2}$	(B) $\frac{1}{3}$	(C) $\frac{1}{4}$	(D) $\frac{1}{5}$	(E) $\frac{2}{5}$



(10) أربعة أبناء عمومة أعمارهم 3, 8, 12, 14 سنة. فاطمة أصغر من خلود. مجموع عمري سلوى وفاطمة يقبل القسمة على 5، وكذلك مجموع عمري سلوى وخلود يقبل القسمة على 5. كم عمر إيناس (ابنة العم الرابعة)؟
لا يمكن التحديد (E) 3 (D) 8 (C) 12 (B) 14 (A)

(11) إذا ضربت الخانات الثلاثة لعدد مكون من ثلاث خانات، ستحصل على 135. ما هي النتيجة التي ستحصل عليها بجمع هذه الأرقام الثلاثة؟
18 (E) 17 (D) 16 (C) 15 (B) 14 (A)

(12) مستطيل مساحته 12 cm^2 . أطوال أضلاعه أعداد طبيعية. أي محيط يمكن أن يكون للمستطيل؟
20 cm (A) 26 cm (B) 28 cm (C) 32 cm (D) 48 cm (E)

(13) أحمد وعلي يلعبان لعبة؛ يكتب أحمد ثلاثة أرقام من خانة واحدة على السبورة. يجمعهم علي فيحصل على 15. ثم يحذف أحد الأرقام الثلاثة ويستبدله بالرقم 3. يضرب أحمد هذه الأرقام الثلاثة الجديدة ويحصل على 36. ما هو الرقم الذي من الممكن أن علي حذفه في الخطوة الثانية من اللعبة؟
6 (A) 7 (B) 8 (C) 6 or 7 (D) 7 or 8 (E)



الوحدة الرابعة: التركيبات

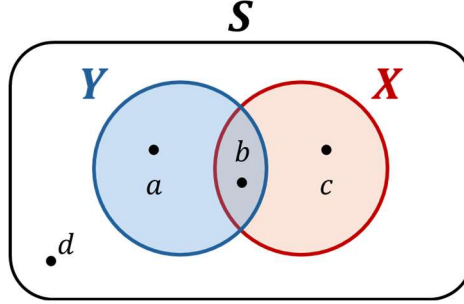




علم العد (التركيبات)

1- العد باستخدام أشكال فن:

تستخدم أشكال فن لحل مسائل العد التي تتضمن أنواع متداخلة في الصفات. وعادة تمثل الأنواع بدوائر متداخلة، في كل جزء منها عدد يمثل عدد العناصر من هذا النوع كما في الرسم التوضيحي:



a يحقق الخاصية Y فقط

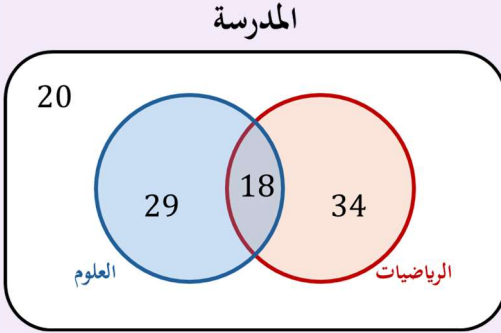
c يحقق الخاصية X فقط

b يحقق الخاصيتين X و Y معاً

d لا يحقق الخاصية X ولا يحقق الخاصية Y (لا يحقق أي من الخاصيتين X أو Y)

مثال:

الشكل التالي يمثل أعداد الطلاب في مدرسة والذين يفضلون حصّة الرياضيات والذين يفضلون حصّة العلوم.



- كم عدد الطلاب الذين يفضلون الرياضيات؟
- كم عدد الطلاب الذين يفضلون العلوم أو الرياضيات؟
- كم عدد الطلاب الذين يفضلون العلوم والرياضيات معاً؟
- كم عدد الطلاب الذين يفضلون العلوم فقط؟
- كم عدد الطلاب الذين لا يفضلون العلوم؟
- كم عدد طلاب المدرسة؟

الحل:

- $18 + 34 = 52$
- $29 + 18 + 34 = 81$
- 18
- 29
- $18 + 34 + 20 = 72$
- $18 + 34 + 29 + 20 = 101$

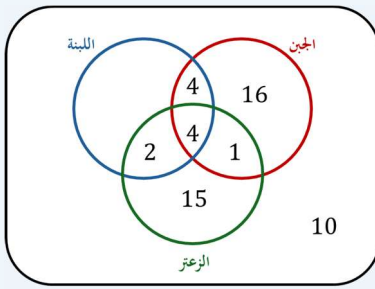


تدريبات:

(1) في أحد فصول الموهوبين لدينا 35 طالباً، تم تقديم عرض للطلاب بتعلم لغة أجنبية وهي الإنجليزية والفرنسية. أختار 15 طالب اللغة الإنجليزية، واختار 5 طلاب اللغتين معاً. إذا علمت أن أي طالب أختار تعلم أحد اللغتين على الأقل، فكم عدد الطلاب الذين اختاروا تعلم اللغة الفرنسية فقط؟

(2) ذهب 40 شخص في رحلة، 18 منهم يفضلون فطيرة الجبن و15 منهم يفضلون فطيرة اللبنة، بينما 12 منهم لا يفضلون أي من النوعين. كم عدد الطلاب الذين يفضلون النوعين معاً؟

(3) تم عمل استفتاء لـ 50 طالباً في مدرسة لمعرفة نوع الرياضة المفضلة لديهم، وكانت النتيجة أن 33 منهم يفضلون لعبة كرة القدم و24 يفضلون كرة السلة و11 منهم يفضلون اللعبتين معاً. كم عدد الطلاب الذين لا يفضلون أي من اللعبتين؟



(4) يظهر في الشكل توزيع طلاب مدرسة فيها 60 طالب،

حسب تفضيلهم لثلاثة أنواع من الفطائر.

كم عدد الطلاب الذين يفضلون اللبنة؟

(5) عمل مدير مصنع دراسة على ثلاثة منتجات من المصنع، فوجد أن 38 شخصاً أحبوا المنتج "أ"، و36 أبدوا إعجابهم

بالمنتج "ب"، و39 أعجبهم المنتج "ج"، وإن 24 شخصاً أحبوا المنتجين "أ" و"ب"، و20 شخصاً أحبوا المنتجين "ج" و"أ"،

و18 شخصاً أحبوا المنتج "ب" و"ج"، وأخيراً 9 أشخاص أحبوا جميع المنتجات الثلاثة.

ما عدد الأشخاص الذين أحبوا المنتج "ج" فقط؟



2- عد قائمة من الأعداد:

من السهل عد الأعداد في القائمة 1,2,3,4, ..., 50 ولذلك تسمى قائمة بسيطة، ومن هنا يمكن القول إن قائمة الأعداد بسيطة إذا حققت الشرطين:

- 1- تبدأ بالعدد 1 .
- 2- الأعداد المتجاورة متتالية.

مثال:

كم عدد الأعداد في القائمة 3,6,9, ..., 327

الحل:

القائمة ليست بسيطة لكن يمكن تحويلها إلى قائمة بسيطة بقسمة جميع الأعداد في القائمة على 3 لتصبح

$\div 3$	3,6,9, ..., 327	
	1,2,3, ..., 109	قائمة بسيطة

إذاً عدد الأعداد يساوي 109

مثال:

كم عدد الأعداد في القائمة 23,28,33, ..., 548

الحل:

القائمة ليست بسيطة لكن يمكن تحويلها إلى قائمة بسيطة بالخطوات التالية

-3	23,28,33, ..., 548	
$\div 5$	20,25,30, ..., 545	
-3	4,5,6, ..., 109	
	1,2,3, ..., 106	قائمة بسيطة

إذاً عدد الأعداد يساوي 106

ويمكن تحويل بعض القوائم لقائمة بسيطة بإجراء عملية على جميع الأعداد فيها، وذلك لأن العمليات على جميع الأعداد تنتج قائمة لها نفس العدد من الأعداد. وسنرى في التدريبات القادمة تدريبات توضح ذلك.



تدريبات:

(1) كم عدد الأعداد في القائمة:

1,2,3, ...,1440 ؟

(2) كم عدد الأعداد في القائمة:

8,9, ...,2019 ؟

(3) كم عدد الأعداد في القائمة:

5,9,13, ...,505 ؟

(4) كم عدد الأعداد الزوجية الموجبة الأقل من 2025 ؟

(5) كم عدد الأعداد في القائمة التالية:

$\frac{3}{7}, 1, \frac{11}{7}, \dots, 289$

(6) كم عدد الأعداد بين 2023,63 ومن مضاعفات العدد 3 ؟

(7) كم عدد صحيح موجب أقل من 600 بحيث يكون مربعاً كاملاً؟

(8) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 1447 والتي من مضاعفات العدد 3 ومن مضاعفات العدد 5 ؟

(9) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 2025 والتي من مضاعفات العدد 7 وليست من مضاعفات العدد

(10) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 500 والتي من مضاعفات العدد 7 وليست أعداد زوجية؟



الحلول





حلول (الجبر)

الأعداد الصحيحة وخواصها:

تدريبات:

(1)

- a) 5
- b) - 6
- c) 32
- d) - 64
- e) 25
- f) 0
- g) 32
- h) - 3
- i) 2
- j) 38
- k) 6
- m) - 4

(2)

- a) a^7
- b) x^4
- c) a^{12}
- d) x^{26}
- e) a^2
- f) 1

(3)

a) 32



أسئلة التحدي:

(1)

$$-1 - (-1)^1 - (-1)^2 - (-1)^3 - \dots - (-1)^{99} - (-1)^{100} \\ = -1$$

(2)

$$1234 \times 9999 \\ 12338766$$

(3)

$$5\{(2a - 3) - [7(4a - 1) - 20]\} - (3 - 8a) \\ = -122a + 117$$

(4)

عدد الدورات خلال أسبوع يساوي 7

$$24$$

(5)

أصغر عدد على الحجر السادس، وهو العدد 2.

(6)

$$1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 100 + 101 \\ = 51$$



مجموعة الأعداد النسبية :Q:

تدريبات:

(1)

a) $\frac{17}{30}$

b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{-1}{6}$

d) $\frac{-1}{10}$

e) $\frac{1}{60}$

f) $\frac{1}{90}$

g) $\frac{10}{9}$

h) $\frac{-3}{5}$

i) $\frac{-1}{32}$

(2)

a) $0.\bar{2} = \frac{2}{9}$

b) $0.\bar{37} = \frac{37}{99}$

c) $1.8\bar{23} = \frac{361}{198}$

(3)

نعم، الادعاء صحيح

(4)

زعم صالح صحيح

(5)

الترتيب التصاعدي (من اليسار لليمين):

$$-\frac{1}{3}, -0.3, -0.23$$



أسئلة التحدي:

(1)

كسران فقط.

(2)

حصل خالد على 16

(3)

$\frac{4}{5}$ من مشواره.

(4)

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$$

$$= \frac{9}{10}$$

(5)

$$\frac{1}{80}$$

(6)

A		7						e	d	c	7	b	4
---	--	---	--	--	--	--	--	---	---	---	---	---	---

$$.A = 9$$

(7)

عمر ليلى وقتها 59 عامًا.

(8)

الجدول الصحيح هو:

أهداف عليه	أهدافه	خسر	تعادل	فاز	لعب	الفريق
3	5	0	1	1	2	A
3	1	1	0	0	1	B
2	2	0	1	0	1	C



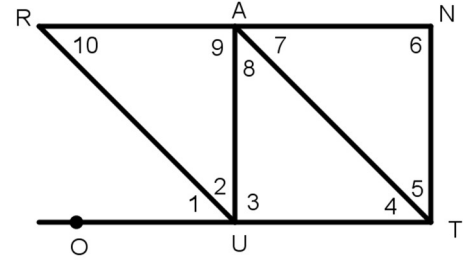
حلول (الهندسة)

النقاط، المستقيمات، والزوايا:

تدريبات:

(1)

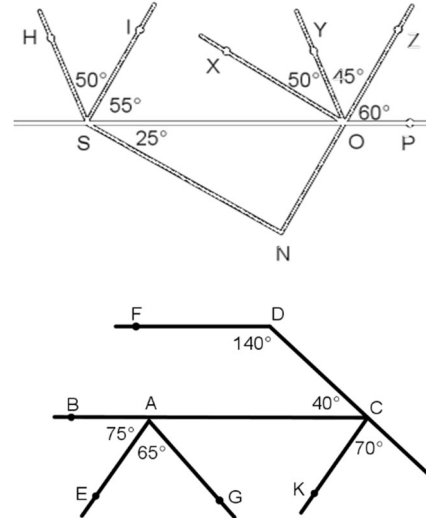
- a) $\angle 1 \cong \angle 4 \Rightarrow RU \parallel AT$.
 b) $m\angle 2 \cong m\angle 10 \Rightarrow$ لا يوجد توازي بالضرورة .
 c) $m\angle 5 \cong m\angle 7 \Rightarrow$ لا يوجد توازي بالضرورة .
 d) $\angle 5 \cong \angle 8 \Rightarrow AU \parallel NT$.
 e) $m\angle 6 = m\angle 9 = 90^\circ \Rightarrow AU \parallel NT$.
 f) $m\angle 6 = m\angle 3 = 90^\circ \Rightarrow$ لا يوجد توازي بالضرورة .
 g) $m\angle 7 = m\angle 10 = m\angle 1. \Rightarrow RU \parallel AT, RA \parallel OU$



(2)

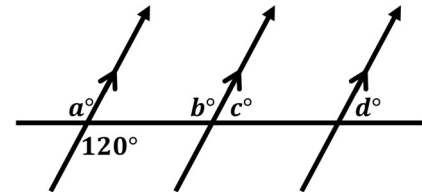
$HS \parallel YO$
 $NS \parallel XO$

$FD \parallel AC$
 $\Rightarrow DC \parallel AG$



(3)

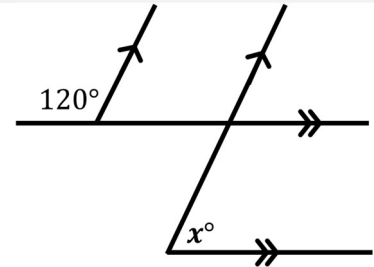
$\angle d = 60^\circ$





(4)

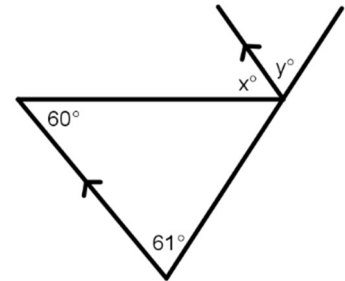
$$x = 60^\circ$$



(5)

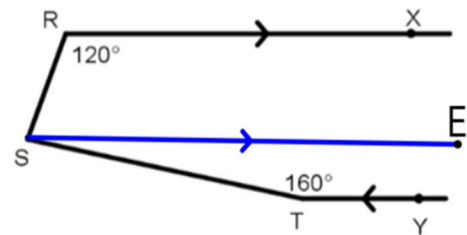
$$x = 60^\circ$$

$$y = 61^\circ$$



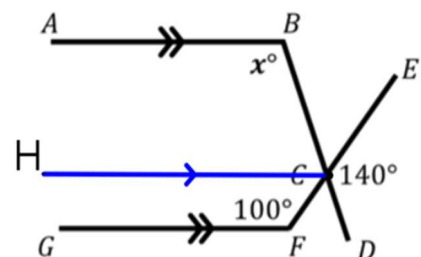
(6)

$$\angle TSR = 80^\circ$$



(7)

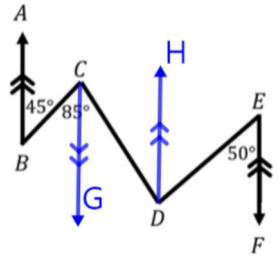
$$x = 120^\circ$$





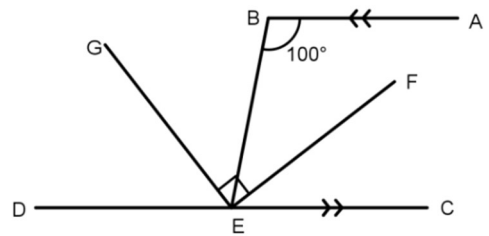
(8)

$$\angle CDE = 90^\circ$$



(9)

$$\angle DEG = 50^\circ$$



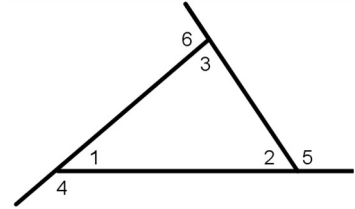


المثلثات:

تدريبات:

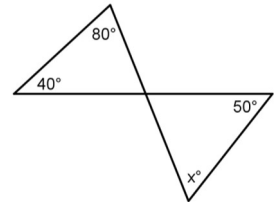
(1)

- a) $m\angle 6 = 100^\circ$
- b) $m\angle 5 = 115^\circ$
- c) $m\angle 4 = 115^\circ$
- d) $m\angle 3 = 75^\circ$
- e) $m\angle 3 = 80^\circ$
- b) $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360^\circ$



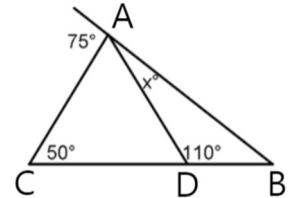
(2)

$$\Rightarrow x = 70^\circ$$



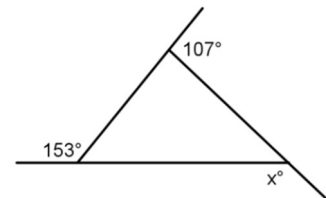
(3)

$$x = 45^\circ$$



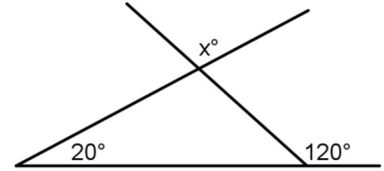
(4)

$$x = 100^\circ$$



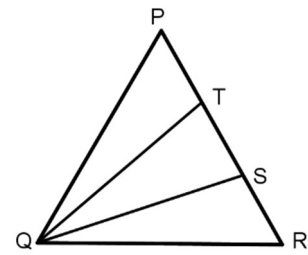
(5)

$$x = 100^\circ$$



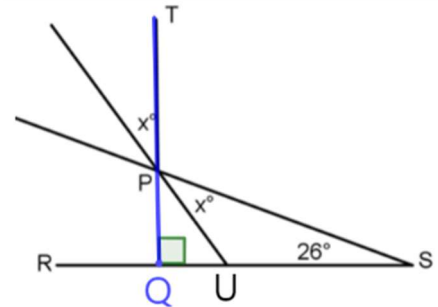
(6)

$$\angle QTP = 100^\circ$$



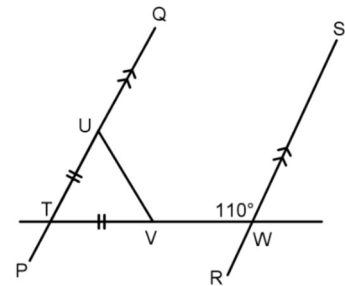
(7)

$$x = 32^\circ$$



(8)

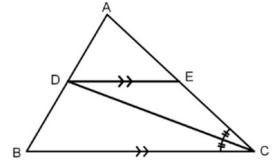
$$\angle QUV = 125^\circ$$





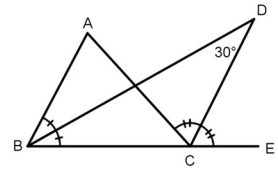
(9)

$$\angle BDC = 90^\circ$$



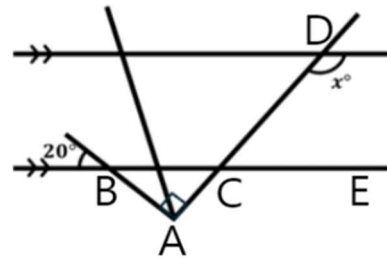
(10)

$$\angle A = 60^\circ$$



(11)

$$x = 110^\circ$$

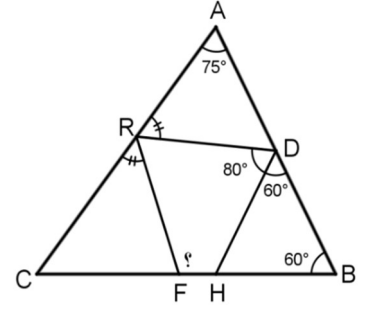




تدريبات المضلعات الرباعية:

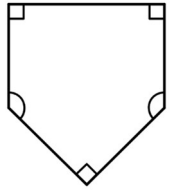
(1)

$$\angle HFR = 110^\circ$$



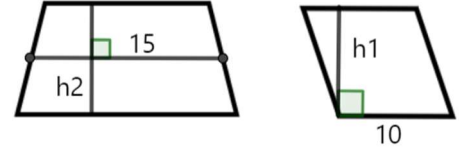
(2)

$$x = 135^\circ$$



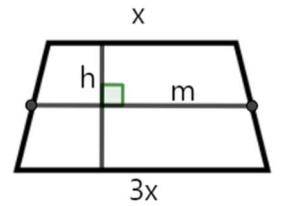
(3)

$$\frac{2}{3}$$

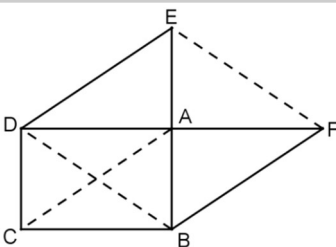


(4)

$$3x = 15$$



(5)



$$EF \parallel BD$$

حلول (نظرية الأعداد)

تدريبات:

1(

(1)

الإجابة الصحيحة هي 19.

(2)

الإجابة الصحيحة هي 0.1

(3)

الإجابة الصحيحة هي 2468642.

(4)

الإجابة الصحيحة هي 12.

(5)

إذا الإجابة الصحيحة هي: $(E) \frac{23}{12}$

(6)

الإجابة الصحيحة هي 2.5.

(7)

الإجابة الصحيحة هي 12.

(8)

الإجابة الصحيحة هي 2.

(9)

الإجابة الصحيحة هي $\frac{1}{2}$

(10)

الإجابة الصحيحة هي 14.

(11)

الإجابة الصحيحة هي 17.

(12)

الإجابة الصحيحة هي 26 cm .

(13)

الإجابة الصحيحة هي 7 أو 8.



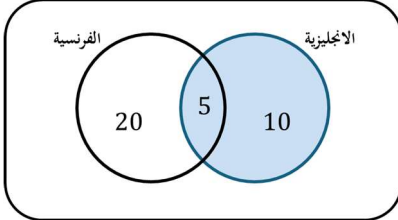
حلول (تركيبات)

تدريبات العد باستخدام أشكال فن:

1(

الذين اختاروا تعلم الفرنسية فقط =

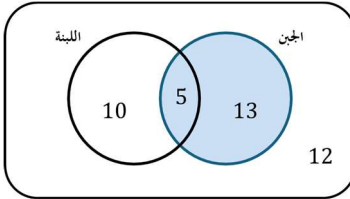
20



(2)

الذين يفضلون النوعين معاً =

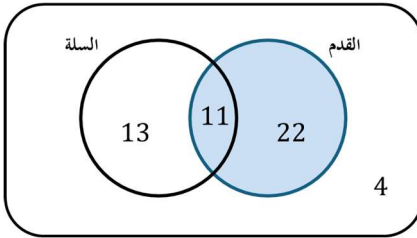
5



(3)

الذين لا يفضلون أيّاً من اللعبتين =

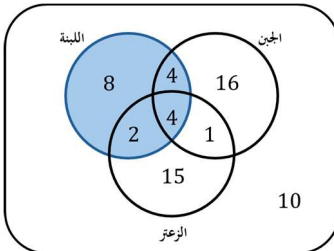
4



(4)

الذين يفضلون اللبنة =

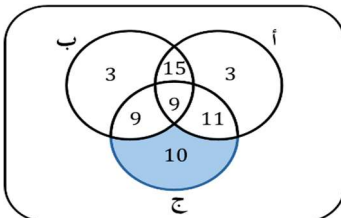
18



(5)

الذين أحبوا المنتج (ج) فقط =

10



تدريبات عد قائمة من الأعداد:

	(1)
قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 1440	
	(2)
2012	(3)
126	(4)
1012	(5)
506	(6)
653	(7)
24	
	(8)
96	(9)
232	(10)
36	