أولمبياد العلوم والرياضيات الوطني
نسمو

حقيبة رياضيات 1

مسابقة المدن والمحافظات

2026م

إعداد

الفريق العلمي للرياضيات

بسم الله الرحمن الرحيم

الفهرس

مقدمة

أبناؤنا وبناتنا الموهوبين،

هذه هي المرحلة الأولى من **مسابقة الأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات**، وهي الانطلاقة الأساسية في رحلة تدريبية تهدف إلى تنمية مهارات التفكير الرياضي لدى طلاب وطالبات الصفين الأول والثاني المتوسط.

تتكون المسابقة من أربع مراحل متتابعة هي :المدن والمحافظات، الإدارات العامة، الفرق الوطنية، وما قبل النهائيات.

تهدف هذه الحقيبة إلى بناء قاعدة معرفية قوية في أربعة فروع رئيسة من فروع الرياضيات هي :**التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد.**

وتتناول موضوعات مثل العدّ باستخدام أشكال فن ومبادئ العدّ الأساسية، خصائص المثلثات والزوايا، الأعداد الصحيحة والتحليل إلى العوامل، والمفاهيم الأولية في نظرية الأعداد، والأعداد النسبية والعمليات عليها.

تُسهم هذه الموضوعات في تنمية قدرات التفكير المنطقي والتحليل الرياضي لدى الطلبة، وتمكنهم من التعامل مع المسائل بطرق إبداعية ومنهجية، لتكون هذه المرحلة بوابتهم الأولى نحو التميز في المراحل القادمة من المسابقة.

مع تمنياتنا لكم بمزيد من الإبداع والتوفيق.

الفريق العلمي للأولمبياد الوطني للعلوم والرياضيات (نسمو) – مسار الرياضيات

الوحدة الأولى: الجبـــــــــر

1- الأعداد الصحيحة وخواصها:

1-1 مجموعات الأعداد:

مجموعة الأعداد الطبيعية: $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$

مجموعة الأعداد الكلية: $\mathbb{W} = \{0,1,2,3, \dots\}$

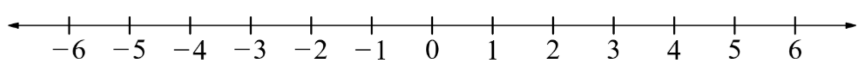
مجموعة الأعداد الصحيحة: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1,0,1,2,3, \dots\}$

يمكن تقسيم الأعداد الصحيحة إلى ثلاث مجموعات هي:

- الأعداد الصحيحة الموجبة.
- الصفر.
- الأعداد الصحيحة السالبة.

لاحظ العدد $+1$ نكتبه اختصاراً 1 بمعنى أن إشارة موجب في العادة لا تكتب ولا تنطق، بينما السالب يكتب وينطق، لاحظ أيضاً أن الصفر ليس موجباً وليس سالباً.

2-1 خط الأعداد:



يستخدم خط الأعداد لتوضيح ترتيب الأعداد الصحيحة، فكلما اتجهنا يميناً تزيد قيمة العدد الصحيح، وكلما اتجهنا يساراً تقل قيمة العدد الصحيح. مما يعني أن أي عدد موجب أكبر من أي عدد سالب، وكذلك الصفر أكبر من أي عدد سالب وأصغر من أي عدد موجب.

يقال للعددين $5, -5$ أن كل منهما نظير (أو معكوس) جمعي للآخر، عموماً العددان الصحيحان $a, -a$ كل منهما نظير جمعي للآخر، بينما الصفر نظير جمعي لنفسه.

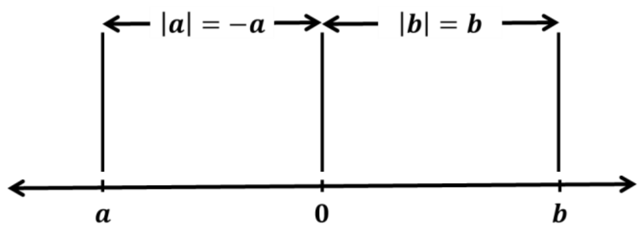
لاحظ أن العدد ونظيره الجمعي يمثلهما نقطتان على خط الأعداد تبعدان البعد نفسه عن النقطة التي تمثل الصفر، ولكن في جهتين مختلفتين منه.

3-1 القيمة المطلقة للعدد الصحيح:

نرمز للقيمة المطلقة للعدد الصحيح a بالرمز $|\,a\,|$, فمثلا:

$|\,0\,| = 0 \quad , \quad |\,-5\,| = 5 \quad , \quad |\,5\,| = 5$ وهكذا

هندسيا كل عدد صحيح يمثل بنقطة على خط الأعداد، و $|\,a\,|$ تعني المسافة بين النقطة الممثلة للعدد a ونقطة الأصل على خط الأعداد، عموما $|\,a-b\,|$ تعني المسافة بين النقطتين الممثلتين للعددين $a\,,b$.



عندما نأخذ القيمة المطلقة لمقدار جبري وكانت إشارته (−) يمكن جعله غير سالب بإزالة (−) .

4-1 القواعد الأساسية في الجمع والطرح والضرب والقسمة:

– خاصية الإبدال:

- $a + b = b + a$
- $ab = ba$

- خاصية التجميع:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(ab)c = a(bc)$

- خاصية التوزيع:

- $a(b + c) = (b + c)a = ab + ac$
- $a(b - c) = (b - c)a = ab - ac$

- خاصية الانغلاق:

تتحقق في الجمع والضرب والطرح فقط دون القسمة! فمثلا لكل عددين صحيحين a, b فإن:

$a + b$ وكذلك $a - b$ و $a \times b$ عدد صحيح بالضرورة، بينما $a \div b$ ليس بالضرورة عدد صحيح.

- خاصية المحايد الجمعي:

هو الصفر بمعنى لكل عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ فإن:

- $a + 0 = 0 + a = a$

- خاصية النظير الجمعي:

لكل عدد صحيح $a \in \mathbb{Z}$ يوجد عدد $-a \in \mathbb{Z}$ يحققان أن:

- $a + (-a) = (-a) + a = 0$

5-1 الأسس:

تستخدم الأسس للتعبير عن حاصل ضرب متكرر، فمثلاً:

$$2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

وكذلك:

$$a^n = \overbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}^{n}$$

خواص الأسس (القوى):

إذا كان $x, y > 0$ وَ $m, n \in \mathbb{Z}$ فإن:

$(1)\ x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ $\qquad (2)\ \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ $\qquad (3)\ (x^m)^n = x^{mn}$

$(4)\ (xy)^n = x^n y^n$ $\qquad (5)\ \left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$ $\qquad (6) x^0 = 1$

$(7) x^{-1} = \dfrac{1}{x}$

6-1 قاعدة فك الأقواس:

لأي عددين صحيحين x, y

$(1)\ x + (y) = x + y \quad , \quad x + (-y) = x - y$

$(2)\ x - (y) = x - y \quad , \quad x - (-y) = x + y$

$(3)\ x(-y) = (-x)y = -xy \quad , \quad (-x)(-y) = xy$

$$(4) \begin{cases} (-1)^n = -1 & \text{عندما } n \text{ عدد صحيح فردي} \\ (-1)^n = 1 & \text{عندما } n \text{ عدد صحيح زوجي} \end{cases}$$

أمثلة:

(1) أوجد قيمة كل من:

$a)\ (-2) + 12 =$ $\quad b)\ (-3) + (-6) + 5 =$ $\quad c)\ -3 - 11 - 31 =$

$d)\ (-5) \times (-4) =$ $\quad e)\ (-4) \times 8 =$ $\quad f)(-1) \times 2 \times 2 =$

الحل:

$$
\begin{aligned}
&a)\ (-2) + 12 = 10\\
&b)\ (-3) + (-6) + 5 = [(-3) + (-6)] + 5\\
&\qquad\qquad = (-9) + 5 = -4\\
&c)\ -3 - 11 - 31 = -(3 + 11 + 31) = -45\\
&d)\ (-5) \times (-4) = 20\\
&e)\ (-4) \times 8 = -32\\
&f)\ (-1) \times 2 \times 2 = -4
\end{aligned}
$$

(2) أوجد قيمة كل من:

$a)\ |-2| + (-2) =$ $\quad b)\ (-3)^2 - 3 =$

$c)\ (a^2)^3 \times a^3 =$ $\quad d)\ \dfrac{x^3 \times x}{x^2} =$

الحل:

$$
\begin{aligned}
&a)\ |-2| + (-2) = 2 - 2 = 0\\
&b)\ (-3)^2 - 3 = 9 - 3 = 6\\
&c)\ (a^2)^3 \times a^3 = a^6 \times a^3 = a^9\\
&d)\ \frac{x^3 \times x}{x^2} = \frac{x^4}{x^2} = x^2
\end{aligned}
$$

(3) بسط:

$$3a + \{-4b - [4a - 7b - (-4a - b)] + 5a\}$$

الحل:

$$
\begin{aligned}
3a + \{-4b - [4a - 7b - (-4a - b)] + 5a\} &= 3a + \{-4b - [4a - 7b + 4a + b] + 5a\}\\
&= 3a + \{-4b - [8a - 6b] + 5a\}\\
&= 3a + \{-4b - 8a + 6b + 5a\}\\
&= 3a + \{2b - 3a\}\\
&= 2b + (3a - 3a)\\
&= 2b
\end{aligned}
$$

تدريبات:

(1) أوجد قيمة كل من:

$a)\ (-4)+9=$
$b)\ -42\div 7=$
$c)\ (2)^5=$
$d)\ (-4)^3=$
$e)\ (-5)^2=$
$f)\ |0|=$
$g)\ (-4)\times(-8)=$
$h)\ -8-(-5)=$
$i)\ -1-4+7=$
$j)\ 2\times 4+6\times 5=$
$k)\ |-6|=$
$m)\ |-3|-|-7|=$

(2) أوجد قيمة كل من:

$a)\ a^2\times a^5=$
$b)\ x^7\div x^3=$
$c)\ (a^3)^4=$
$d)\ (x^2)^3\times(x^4)^5=$
$e)\ \dfrac{a^3\times a^7}{a^2\times a^6}=$
$f)\ \dfrac{a^4\times a^5}{a^3\times a^6}=$

(3) احسب القيم العددية لكل مما يأتي:

$a)\ (-7)+(-12)-(-14)-(-15)-(-18)-(-38)$
$b)\ (-5)^2+|-6|-(-1)^{1447}$

أسئلة التحدي:

(1) أوجد قيمة:

$$-1-(-1)^1-(-1)^2-(-1)^3-\cdots-(-1)^{99}-(-1)^{100}$$

(2) أكمل

$$1234 \times 9999 = \cdots$$

(3) بسط

$$5\{(2a-3)-[7(4a-1)-20]\}-(3-8a)$$

(4) يدور قمر صناعي دورة كاملة حول الأرض في 7 ساعات. كم مرة سيدورها ذلك القمر حول الأرض في أسبوع؟

(5) تم إلقاء 6 من أحجار النرد المتماثلة. إذا كان مجموع الأرقام التي تم الحصول على أوجهها الست هو 32.

ما أصغر عدد يمكن ظهوره على أحد الأوجه الست؟

(6) ما قيمة:

$$1-2+3-4+\ldots-100+101؟$$

2- مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$:

العدد النسبي هو كل عدد يمكن كتابته في الصورة $\frac{a}{b}$ حيث، a, b عددان صحيحان، $b \neq 0$ ، يسمى a البسط ويسمى b المقام.

من التعريف السابق نستنتج أن كل الأعداد الصحيحة أعداد نسبة فمثلا:

$$0 = \frac{0}{1} \quad , \qquad -4 = \frac{-4}{1} \quad , \qquad 5 = \frac{5}{1}$$

أيضا العدد $5\frac{1}{2}$ نسبي لأنه يمكن كتابته على الصورة:

$$5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$$

وهكذا...

أما الأعداد العشرية المنتهية فهي نسبية فمثلا:

$$0 \cdot 3 = \frac{3}{10}\ , 1.7 = \frac{17}{10}\ , 2.03 = \frac{203}{100}$$

الأعداد العشرية غير المنتهية نوعان:

دورية مثل:

$0.333 \ldots = 0.\overline{3}\ , \quad 0.521521521 \ldots = 0.\overline{521}$ وهي نسبية

وغير دورية مثل:

$0.345674215677589 \ldots$ فهي غير نسبية

لاحظ النسبة التقريبية والتي يرمز لها بالعربية **ط** وباللغات الأخرى π وتساوي تقريبًا 3.14 أو بتقريب آخر $\frac{22}{7}$ تعتبر عدد غير نسبي.

1-2 خواص الجمع والطرح في الأعداد النسبية:

نفس خواص الجمع في الأعداد الصحيحة.

ولكن مهلاً دائماً نسمع من يردد عند جمع عددين نسبيين أو طرحهما لابد من توحيد المقامات والسؤال لماذا؟

والحقيقة أن الإجابة على ذلك السؤال ليست بالسهولة بمكان! دعنا نحاول.

كلنا نعلم أن: ناتج إضافة ثلاثة جمال إلى خمسة جمال هو ثمانية جمال، وعموماً:

$$3x + 5x = 8x$$

باعتبار أن الرمز x يعبر عن نفس الشيء.

الآن لو قسمنا بيتزا مثلاً لسبعة أجزاء متساوية ومتطابقة يسمى الجزء الواحد سُبع ويرمز له $\frac{1}{7}$.

وباعتبار سبع الواحد شيئاً في حد ذاته، الآن ما ناتج جمع سُبعين مع ثلاثة أسباع، ستكون الإجابة حتماً خمسة أسباع.

ولكن باستخدام الرموز يبدو الأمر مختلفاً، التعبير الرمزي سيكون

$$2\left(\frac{1}{7}\right) + 3\left(\frac{1}{7}\right) = 5\left(\frac{1}{7}\right)$$

ولأن $2\left(\frac{1}{7}\right)$ تكتب $\frac{2}{7}$ فيمكننا التعبير بشكل أبسط $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{5}{7}$، ولكن لمن ينظر للعلاقة الأخيرة تبدو أعقد لأننا جمعنا البسط لكل من الكسرين بشرط أن يكون المقام نفسه (لاحظنا أن الكثيرين يريدون لو يجمعوا المقامات أيضاً فلا تكن مثلهم).

يمكنك بمناقشة مماثلة أن تستنتج أن طرح العددين النسبيين يستلزم أيضاً توحيد المقامات.

ماذا لو كانت المقامات مختلفة؟ كيف نقوم بتوحيد المقامات؟ لنصبر قليلاً ستعرف الإجابة بعد معرفة الخاصية التالية للعدد النسبي.

2-2 خاصية التكافؤ لعددين نسبيين:

إذا كان $\frac{a}{b}$ عدد نسبي، k عدد صحيح غير الصفر فإن:

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot k}{b\cdot k}=\frac{a\div k}{b\div k}$$

بمعنى العدد النسبي يمكن كتابته بعدد غير منته من الصور فمثلاً:

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{5}{10}=\cdots$$

$$\frac{18}{24}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

ولكن تظل الصورة التي يكون البسط والمقام أوليان نسبياً (العددان الأوليان نسبياً هما عددان القاسم المشترك الأكبر لهما يساوي 1) هي الصورة الأجمل وتسمى أبسط صورة لسهولة التعامل معها في العمليات الحسابية، لذا ننصحك دائماً بوضع العدد النسبي في أبسط صورة.

الآن يمكنك جمع عددين نسبيين مختلفي المقام:

مثلاً عند إجراء $\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$. نبحث عن مضاعف مشترك للعددين 3,5 (ويفضل أن يكون أصغر)، وليس من الصعب أن نتأكد أن 15 مضاعف مشترك (أصغر) لهذين العددين. الآن نعيد كتابة الكسرين بشكل مكافئ كالتالي:

$$\frac{2\times 5}{3\times 5}+\frac{1\times 3}{5\times 3}$$

أي

$$\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=\frac{10}{15}+\frac{3}{15}$$

وهذا يساوي $\frac{13}{15}$.

الطرح سيتم التعامل معه بنفس الطريقة.

2-3 تعريف الضرب والقسمة في الأعداد النسبية:

كيف نضرب عددين نسبيين، وما معنى ذلك؟ مثلاً عندما نسألك كم نصف العدد 100 ستجيب فوراً 50 . بدا وكأنك قسمت العدد على 2.

السؤال الآن كم ثلاثة أنصاف العدد 100، ليس من الصعب أن تجيب بأنها 150. بدا وكأنك قسمت على 2 ثم ضربت الناتج في 3 .

دعنا نسأل سؤال أعقد:

كم ثلاثة أنصاف العدد $\frac{1}{7}$ ؟ سنحتاج أن نقسم العدد على 2 ثم نضرب الناتج في 3 . ولكن كم ناتج قسمة $\frac{1}{7}$ على 2 ؟ لأن

$$\frac{1}{7} = \frac{2}{14} = 2\left(\frac{1}{14}\right)$$

وبالتالي نصفه هو $\frac{1}{14}$ (ربما يقترح أحدنا أن الناتج كأننا ضربنا المقام فقط في 2)، عندما نضربه في 3 يصبح ثلاثة نسخ منه ويكتب

$$3\left(\frac{1}{14}\right) = \frac{3}{14}$$

دعنا نصيغ ما حققناه بشكل رمزي:

$$100 \times \frac{3}{2} = 50 \times 3 = 150$$

وكذلك

$$\frac{1}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{1 \times 3}{7 \times 2} = \frac{3}{14}$$

عموماً إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

أخيراً إذا علمت أن القسمة عملية عكسية للضرب فهل يمكنك تبرير تعريف القسمة التالي:

إذا كان $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ عددين نسبيين فإن:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

4-2 خواص الضرب في الأعداد النسبية:

1- الانغلاق:

ناتج ضرب أي عددين نسبيين هو عدد نسبي أيضا.

2- الإبدال:

لا يتغير ناتج الضرب عند تبديل ترتيب العوامل.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

3- التجميع:

لا يتأثر ناتج الضرب بطريقة تجميع العوامل.

4- المحايد الضربي:

العدد 1 هو المحايد الضربي لأن ضرب أي عدد نسبي في 1 لا يغيّر قيمته.

5- النظير الضربي:

لكل عدد نسبي $\frac{a}{b}$ خلاف الصفر يوجد عدد $\frac{b}{a}$ يسمى كل منهما نظير ضربي للآخر بحيث

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$$

6- توزيع الضرب على الجمع والطرح

5-2 كتابة العدد الدوري في صورة عدد نسبي:

مثال:

اكتب العدد الدوري $0.\overline{7}$ على صورة عدد نسبي.

الحل:

بفرض

$$x = 0.\overline{7} = 0.7777 \ldots$$

بضرب الطرفين في 10 نحصل على:

$$10x = 7.7777 \ldots = 7 + 0.777 \ldots$$

ومنها

$$10x = 7 + x$$

بطرح x من الطرفين نحصل على

$$9x = 7$$

وأخيراً بقسمة الطرفين على 9 نجد أن:

$$x = \frac{7}{9}$$

تدريب:

اكتب العدد الدوري $0.\overline{17}$ على صورة عدد نسبي.

إرشاد: نفس خطوات المثال، ولكن ستحتاج أن تضرب في 100 بدلاً من 10.

طريقة سريعة لكتابة العدد الدوري في صورة عدد نسبي:

(البرهان ليس صعباً):

يمكننا كتابة العدد الدوري بشرط أن يكون الجزء الدوري على يمين الفاصلة مباشرة، وذلك بأن نضع الجزء الدوري في البسط والمقام عدد أرقامه كلها تسعات وعددها يساوي عدد أرقام الجزء الدوري كالتالي:

$$0.\overline{7}=\frac{7}{9} \quad , \quad 0.\overline{73}=\frac{73}{99} \quad , \quad 0.\overline{732}=\frac{732}{999} \quad , \ldots$$

ويمكن تطويرها لكتابة أي عدد دوري آخر مثلاً:

$$\begin{aligned} 0.1\overline{7} &= 0.1 + 0.0\overline{7} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \times \frac{7}{9} \\ &= \frac{1}{10} + \frac{7}{90} \\ &= \frac{9}{90} + \frac{7}{90} \\ &= \frac{16}{90} \\ &= \frac{8}{45} \end{aligned}$$

تدريبات:

(1) أوجد ناتج:

$(a)\ \frac{2}{5}+\frac{1}{6}=$

$(b)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=$

$(c)\ \frac{-3}{8}\times\frac{4}{9}=$

$(d)\ \frac{-3}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)$

$(e)\ 1\div 3\div 4\div 5=$

$(f)\ \frac{1}{9}-\frac{1}{10}=$

$(g)\ (-3)\div 4\times 6\div(-5)=$

$(h)\ \frac{-6}{35}\div\frac{2}{7}=$

$(i)\ \left(\frac{-1}{2}\right)^{5}=$

(2) اكتب الأعداد الدورية الآتية على صورة عدد نسبي:

$a)\ 0.\overline{2}$ $\quad b)\ 0.\overline{37}$ $\quad c)\ 1.8\overline{23}$

(3) ادعى ماجد أن القسمة على عدد صحيح تكافئ الضرب في نظيره الضربي. هل تستطيع أن تثبت أو تنفي هذا الادعاء؟

(4) زعم صالح أن بين أي عددين نسبيين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد النسبية، كما زعم أن هذه الصفة تسمى كثافة الأعداد النسبية. هل تستطيع أن تعطي مثالاً يؤيد زعم صالح، أو انف بمثال إن وُجد.

(5) رتب الأعداد التالية ترتيبًا تصاعديًا:

$$-0.3\ ,-0.23\ ,-\frac{1}{3}$$

أسئلة التحدي:

(1) كم كسر أكبر من $\frac{1}{6}$ وأقل من $\frac{1}{3}$ مقامه يساوي 15؟
(2) قسم سعد العدد N على 8 فحصل على 0.25، بينما ضرب خالد العدد N في 8. كم الناتج الذي سيحصل عليه خالد؟
(3) قام هيثم بالجري خارج المنزل. إذا علمت أنه قد أتم قطع $\frac{3}{5}$ النصف الثاني من مشواره. فكم نسبة ما قطعه من المشوار كاملاً؟
(4) أوجد قيمة: $(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\ldots+(\frac{1}{9}-\frac{1}{10})$
(5) أوجد قيمة: $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\cdots\frac{79}{80}$
(6) لدى عادل بطاقة ائتمان بها 14 رقم، لو جمعت أي 3 أرقام متجاورة (بدءاً من اليسار) لحصلت على مجموع 20. قام بكتابة أرقام بطاقته في الجدول التالي. ما الرقم في مربع الحرف A ؟
(7) اليوم هو عيد ميلاد كل من ليلى وابنتيها شهد وأمل. بلغت ليلى من العمر 32 عامًا، وبلغت شهد من العمر 4 سنوات، بينما بلغت أمل من العمر عامًا واحدًا. كم سيكون عمر ليلى عندما يكون عمرها مساويًا مجموع عمري شهد وأمل؟

A		7									7		4

(8) يعيش عمي بعيدًا في مكان منعزل، ورسائله لنا تحتوي دائمًا على ألغاز. في أحد رسائله حكى لنا أن هناك ثلاثة فرق محلية في منطقته وهي النمل (A) ، النحل (B) ، والقطط (C) تقام بينهم بطولة سنوية بحيث كل فريق يلاعب الآخر مرة واحدة على الأكثر. زعم عمي أن جدول الدوري خلال هذه السنة بدا كما يلي:

الفريق	لعب	فاز	تعادل	خسر	أهداف له	أهداف عليه
A	1	0	0	1	4	2
B	2	1	1	0	2	2
C	2	1	0	1	3	1

عندما اشتكينا من أن هذا مستحيل، اعترف بأن كل رقم كان خطأ لكنه عذر نفسه لأن كل رقم كان يحتاج إضافة 1 له أو طرح 1 منه. ابحث عن الجدول الصحيح، واشرح بوضوح كيف استنتجت التصويبات.

الوحدة الثانية: الهندســـة

ملخص:

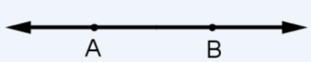
سنستعرض في هذا الملف مجموعة من المفاهيم الهندسية الأساسية مثل أنواع الزوايا، والمستقيمات المتوازية والقاطع، ثم أنواع المثلثات وخصائصها، وأخيرا خصائص المضلعات الرباعية

١- النقاط، المستقيمات، والزوايا:

تبدأ الهندسة بثلاثة مفاهيم بسيطة: النقاط، والمستقيمات، والزوايا. إنها بسيطة جدا بحيث تراها كل يوم، لكنها قوية لدرجة أنها تستطيع بناء عوالم كاملة. فلنبدأ بهدوء ونتعرّف عليها.

تعاريف:

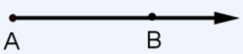
الخط المستقيم:



يتكون المستقيم من عدد غير منته من النقاط ويتم تمثيله كما في الشكل:

وبما أنه يحتوي النقطتين A و B فيمكن التعبير عنه على النحو $\overleftrightarrow{AB}$ أو يمكن تسميته بأحد حروف اللغة، مثل l.

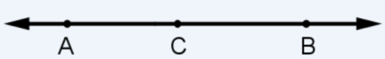
الشعاع:



الشعاع (أو نصف المستقيم) هو عدد غير منته من النقاط لها نقطة بداية وليس لها نقطة نهاية.

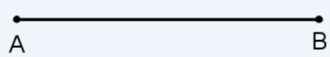
والشعاع الذي يبدأ بالنقطة A باتجاه النقطة B يرمز له بالرمز $\overrightarrow{AB}$.

لاحظ أنه إذا كانت النقطة C واقعة بين النقطتين A و B على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإننا نقول إن الشعاعين $\overrightarrow{CA}$ و $\overrightarrow{CB}$ متعاكسان.

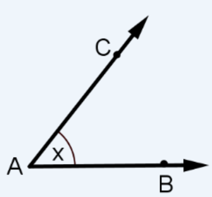


القطعة المستقيمة:

إذا كانت A و B نقطتين على المستقيم $\overleftrightarrow{AB}$ فإن القطعة المستقيمة بين النقطتين A و B يرمز لها بالرمز $\overline{AB}$ وهي مجموعة النقاط الواقعة بين A و B بما في ذلك النقطتين A و B. تسمى النقطتان A و B طرفي القطعة المستقيمة $\overline{AB}$.

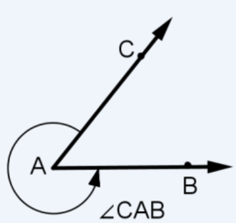


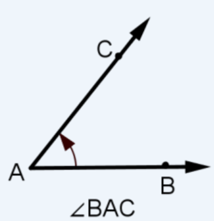
الزوايا وقياسها:



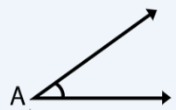
تُعرف الزاوية على أنها اتحاد شعاعين يشتركان في نقطة البداية. تسمى نقطة البداية رأس الزاوية ويسمى الشعاعان ضلعي الزاوية. فمثلاً، على الشكل زاوية رأسها A وضلعاها هما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$.

لاحظ وجود زاوية أخرى ضلعاها $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$. متى شئنا التفريق بين هاتين الزاويتين سنتقيد بالحركة عكس عقارب الساعة فنسمي مثلاً الزاوية المرسومة في الشكل $\angle BAC$ ، ونسمي الأخرى $\angle CAB$.



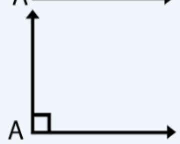


بعض الزوايا الخاصة:



الزاوية الحادة

هي الزاوية التي قياسها أصغر من $90°$.



الزاوية القائمة

هي الزاوية التي قياسها يساوي 90° وعادة تمثل الزاوية القائمة كما بالشكل المجاور.

الزاوية المنفرجة

هي الزاوية التي يزيد قياسها عن $90°$.

الزاوية المستقيمة

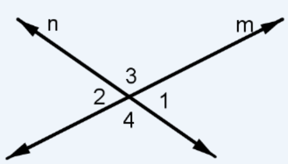
هي الزاوية التي قياسها $180°$. كما بالشكل المجاور.

الزاويتان المتتامتان

يقال عن زاويتين أنهما متتامتان إذا كان مجموع قياسيهما يساوي $90°$.

الزاويتان المتكاملتان

تسمى الزاويتان متكاملتين متى ما كان مجموع قياسيهما يساوي $180°$.

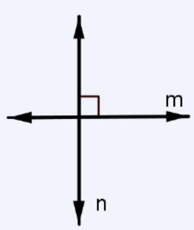


الزاويتان المتجاورتان

هما زاويتان في المستوى تشتركان في ضلع والرأس، ولكنهما لا تشتركان بنقاط داخلية.

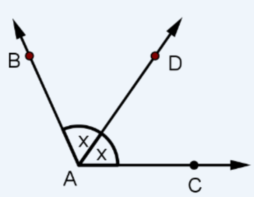
الزاويتان المتقابلتان بالرأس

إذا تقاطع المستقيمان n و m كما هو مبين في الشكل فإنه ينشأ عن ذلك عدد من الزوايا. نقول إن الزاويتين 1 و 2 (أو الزاويتين 3 و 4) متقابلتان بالرأس.



وإذا كانت إحدى الزوايا الناتجة عن هذا التقاطع قائمة (ومن ثم جميع الزوايا الأخرى قائمة) فإننا نقول إن المستقيمين متعامدان ونكتب $m \perp n$. ويمكننا أن نستنتج هنا أن مجموع قياسات الزوايا المتجمعة حول نقطة يساوي $360°$.

مُنصف الزاوية:

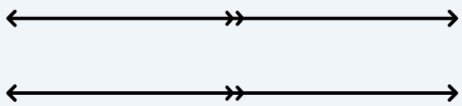


هو شعاع يقسم الزاوية إلى زاويتين متساويتين.

ونقول أن $\overrightarrow{AD}$ هو منصف الزاوية $\angle BAC$

إذا وقعت D داخل الزاوية $\angle BAC$ وكان $\angle BAD = \angle DAC$

المستقيمان المتوازيان:



هما المستقيمين غير المتقاطعين أو متخالفين،

المستقيمان المتوازيان (||) لا يتقاطعان ويقعان في مستوى واحد،

أما المتخالفان فهما لا يتقاطعان ولا يقعان في مستوى واحد .

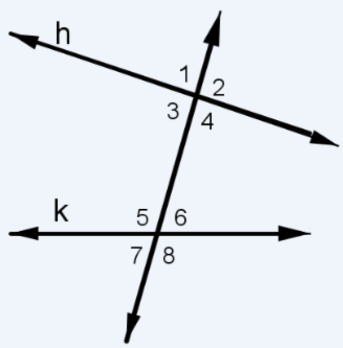
المستقيم القاطع:

هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى واحد.

المستقيم القاطع:

هو المستقيم الذي يقطع مستقيمين أو أكثر في مستوى واحد.

إذا قطع مستقيم مستقيمين آخرين فستتكون لدينا أزواج الزوايا التالية:



الزوايا المتبادلة داخليًا:

هما زاويتان غير متجاورتين وفي جهتين مختلفتين من المستقيم القاطع.

في الشكل المجاور يوجد زوجان من الزوايا التبادلية داخليا هما ($\angle 3$ و $\angle 6$) و ($\angle 4$ و $\angle 5$).

الزوايا المتبادلة خارجيًا:

هما زاويتان خارجيتان لهما رأسان مختلفان ويقعان على جهتين مختلفتين من القاطع. في الشكل يوجد زوجان من الزوايا التبادلية خارجيا هما ($\angle 1$ و$\angle 8$) و ($\angle 2$و$\angle 7$).

الزوايا المتحالفة داخليًا:

هما زاويتين داخليتين وفي جهة واحدة من القاطع ($\angle 3$و $\angle 5$) وكذلك ($\angle 4$و $\angle 6$).

الزوايا المتناظرة:

هما زاويتين في جهة واحدة من القاطع أحدهما داخلة والأخرى خارجة.

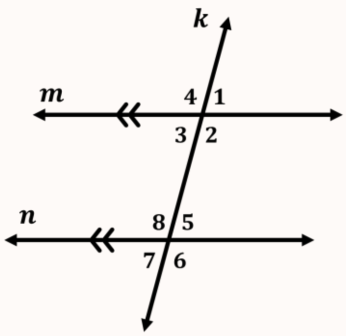
في الشكل المجاور الزوايا المتناظرة هي ($\angle 1$و$\angle 5$) ، ($\angle 2$ و$\angle 6$)، ($\angle 3$و$\angle 7$)، ($\angle 4$و$\angle 8$).

مسلمة (1):

إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متناظرتين متطابقتان.

أي أنه إذا كان $m \parallel n$ وكان k قاطع لهما فإن:

$(\angle 3 = \angle 7), (\angle 2 = \angle 6)$ و $(\angle 4 = \angle 8), (\angle 1 = \angle 5)$.



مسلمة (2):

إذا قطع مستقيم مستقيمين وكانت زاويتين متناظرتين متطابقتين فإن المستقيمين متوازيان.

أي أنه إذا كان المستقيم k يقطع مستقيمين وليكونا m, n

وكان كذلك $(\angle 1 = \angle 5)$ أو $(\angle 4 = \angle 8)$ أو $(\angle 2 = \angle 6)$ أو $(\angle 3 = \angle 7)$ فإن $m \parallel n$.

بالمثل بالنسبة للعلاقة بين الزوايا الداخلية أو المتبادلة داخليا أو خارجيا.

مثال:

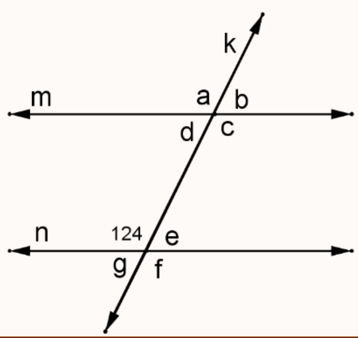
على الشكل المجاور:

إذا كان المستقيم m يوازي المستقيم n ويقطعهما المستقيم k

ولدينا قياس زاوية واحدة يساوي $124°$.

فأوجد قياس الزوايا:

$\angle a, \angle b, \angle c, \angle d, \angle e, \angle f, \angle g$



الحل:

بما أن المستقيم m يوازي المستقيم n ويقطعهما المستقيم k.

إذا:

$\angle a = 124°$ بالتناظر.

$\angle b = 56°$ متجاورتان متكاملتان

$\angle c = 124°$ بالتقابل بالرأس

$\angle d = 56°$ متكاملتان وفي جهة واحدة من القاطع.

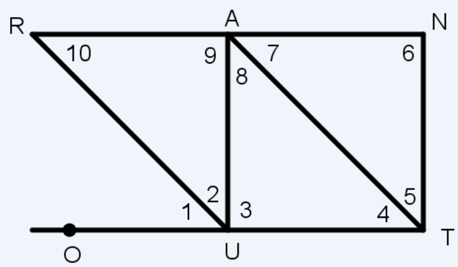
$\angle e = 124°$ بالتناظر مع $\angle b$ أو بالتبادل مع $\angle d$

$\angle f = 124°$ بالتناظر مع $\angle c$

$\angle g = 56°$ بالتناظر مع $\angle d$

تدريبات:

1) على الشكل المجاور وباستخدام المعلومات الموضحة عليه، أوجد المستقيمات التي يجب ان تكون متوازية (إن وجدت) في الحالات التالية:



a) $\angle 1 \cong \angle 4$.

b) $m\angle 2 \cong m\angle 10$.

c) $m\angle 5 \cong m\angle 7$.

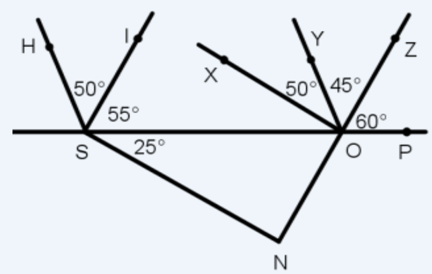
d) $\angle 5 \cong \angle 8$.

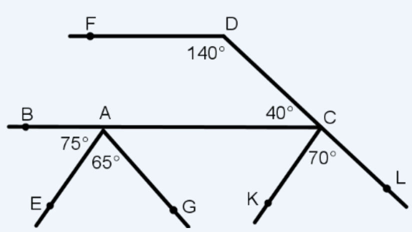
e) $m\angle 6 = m\angle 9 = 90°$.

f) $m\angle 6 = m\angle 3 = 90°$.

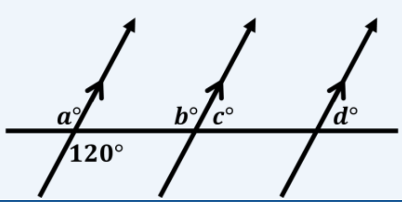
g) $m\angle 7 = m\angle 10 = m\angle 1$.

2) على الشكلين التاليين أوجد ازواج المستقيمات المتوازية، ثم حدد الزوايا المتطابقة أو المتكاملة التي استخدمتها لذلك.

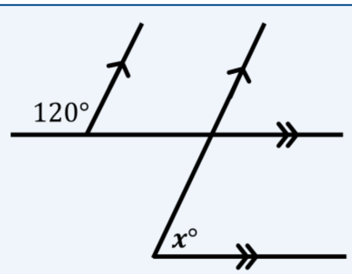




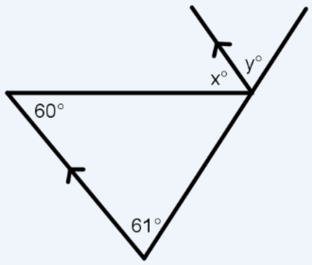
(3) في الشكل المجاور، أوجد قياس $\angle d$.



(4) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x.

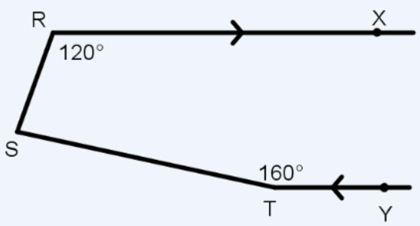


(5) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x, y.



(6) على الشكل المجاور: أوجد قياس $\angle RST$

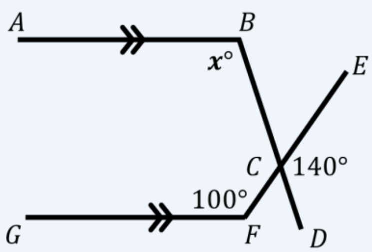
(إرشاد: مستقيم يمر بالنقطة S يوازي $\overline{RX}, \overline{TY}$).



(7) على الشكل المجاور: لدينا $AB \parallel GF$ ،

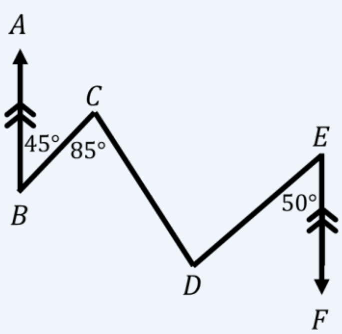
$\angle ECD = 140°, \angle GFC = 100°$.

أوجد قيمة x



(8) على الشكل: لدينا $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{EF}$،

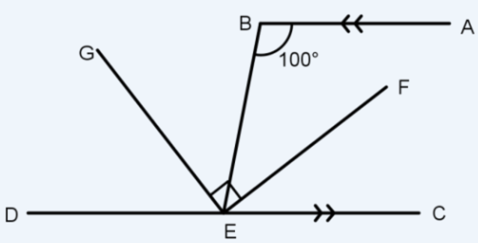
$\angle ABC = 45°, \angle BCD = 85°, \angle DEF = 50°$. أوجد قياس $\angle CDE$.



(9) على الشكل المجاور:

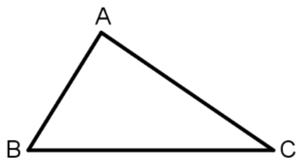
$AB \parallel DC$ ، $\angle B = 100°$ ،EF ينصف $\angle BEC$ ، EFعمودي على EG.

أوجد قياس كل من $\angle BEG, \angle DEG$.



2- المثلثات:

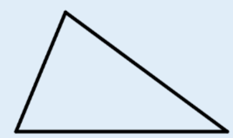
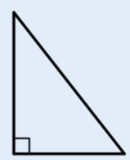
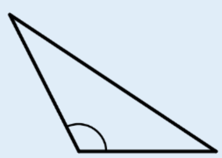
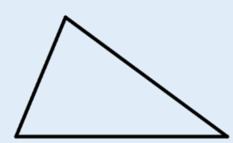
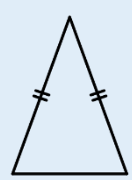
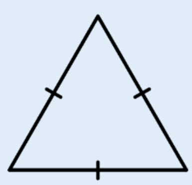
المثلثات من المفاهيم الأساسية في الهندسة وهي حالة خاصة من المضلعات التي سندرسها لاحقا.



المثلث نرمز له عادة بالرمز △ وهو اتحاد ثلاث قطع مستقيمة تتحدد بثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة. تسمى النقاط C,B,A رؤوس المثلث

والقطع المستقيمة $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ أضلاع المثلث وزوايا المثلث هي $\angle A$ ، $\angle B$ ، $\angle C$.

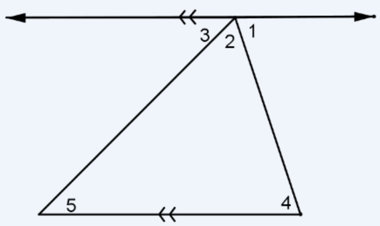
تصنف المثلثات حسب أضلاعها وحسب زواياها:

المثلث الحاد الزوايا	المثلث القائم الزاوية	المثلث المنفرج الزاوية
		
هو المثلث الذي تكون جميع زواياه حادة أي أقل من 90 درجة.	هو المثلث الذي تكون إحدى زواياه قائمة (تساوي 90 درجة).	هو المثلث الذي إحدى زواياه منفرجة (أكبر من 90 درجة).
	يسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة الوتر ويسمى كل من ضلعي القائمة ساقا	
المثلث المختلف الأضلاع	**المثلث المتساوي الساقين**	**المثلث المتطابق الأضلاع**
		
هو المثلث الذي أطوال أضلاعه الثلاثة مختلفة.	هو المثلث الذي يكون فيه ضلعان متساويان	هو المثلث الذي تكون جميع أضلاعه متساوية
	الزاويتان المقابلتان للضلعين المتساويين متساويتان أيضا. يسمى كل من الضلعين المتساويين ساقا ويسمى الضلع الثالث قاعدة المثلث كما تسمى الزاوية المقابلة للقاعدة بزاوية الرأس وتسمى كل من الزاويتين المتساويتين بزاوية القاعدة.	في هذه الحالة تكون جميع زواياه متساوية وقياس كل منها $60°$

نظرية:

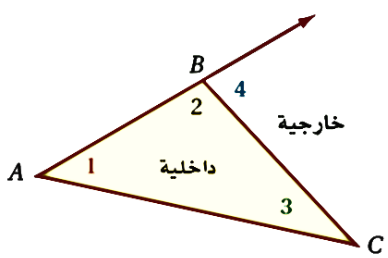
مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلية تساوي $180°$

لإثبات ذلك: نرسم مستقيم يوازي أي ضلع في مثلث ويمر بالرأس المقابلة. وبما أن مجموع قياسات الزوايا $\angle 1, \angle 2, \angle 3$ يساوي $180°$، وبما أن $\angle 1 = \angle 5$ ،$\angle 3 = \angle 4$ (بالتبادل). إذن مجموع قياسات الزوايا $\angle 2, \angle 4, \angle 5$ تساوي $180°$.



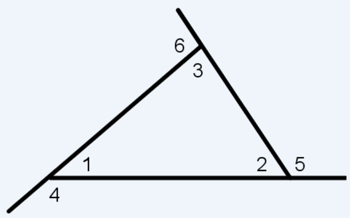
ملاحظات:

- إذا مددنا أحد أضلاع المثلث فتسمى الزاوية التي تنشأ عن ذلك زاوية خارجة.
- الزاوية الخارجة عن المثلث تساوي مجموع زوايا المثلث الداخلة عدا المجاورة لها.
- إذا طابقت زاويتين في مثلث زاويتين في مثلث آخر فإن الزاوية الثلاثة في المثلث الأول تطابق الزاوية الثالثة في المثلث الآخر.
- إذا تساوت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متساويان والعكس صحيح.
- في أي مثلث لا يمكن أن يكون هناك أكثر من زاوية قائمة أو منفرجة.
- الزاويتان الحادتان في المثلث القائم متتامتان (مجموعهما $90°$).



تدريبات:

(1) باستخدام الشكل المجاور أكمل:



$\boldsymbol{a}$) إذا كان $m\angle 1 = 40°, m\angle 2 = 60°$، فإن: $m\angle 6 =$ ________

$\boldsymbol{b}$) إذا كان $m\angle 1 = 45°, m\angle 3 = 70°$، فإن: $m\angle 5 =$ ________

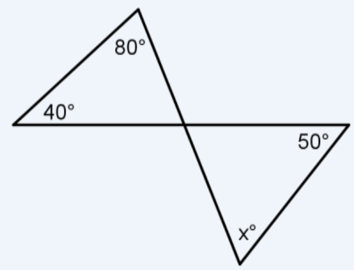
$\boldsymbol{c}$) إذا كان $m\angle 2 = 50°, m\angle 3 = 65°$، فإن: $m\angle 4 =$ ________

$\boldsymbol{d}$) إذا كان $m\angle 4 = 135°, m\angle 2 = 60°$، فإن: $m\angle 3 =$ ________

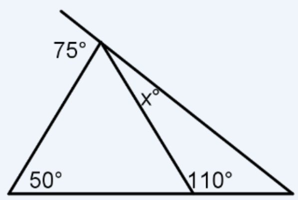
$\boldsymbol{e}$) إذا كان $m\angle 5 = 120°, m\angle 1 = 40°$، فإن: $m\angle 3 =$ ________

$\boldsymbol{f}$) $m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 =$ ________.

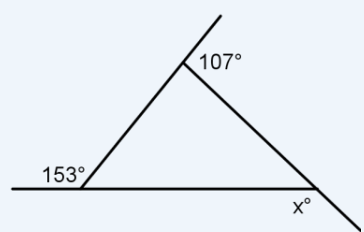
(2) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x.



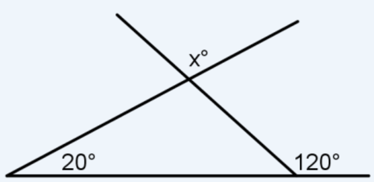
(3) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x.



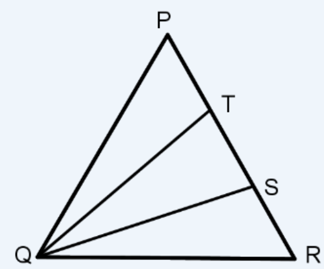
(4) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x.



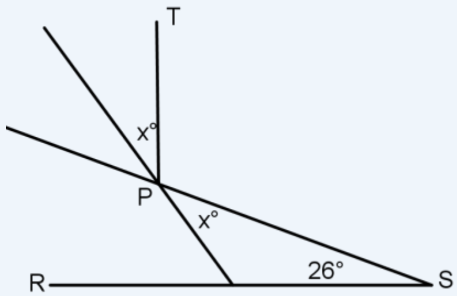
(5) على الشكل المجاور، أوجد قيمة x.



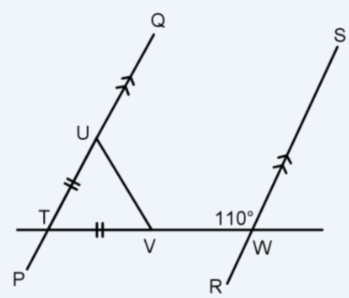
(6) على الشكل المجاور: QPR مثلث متطابق الأضلاع QT, QS تقسم $\angle PQR$ لثلاثة أجزاء متساوية.
اوجد قياس $\angle QTP$.



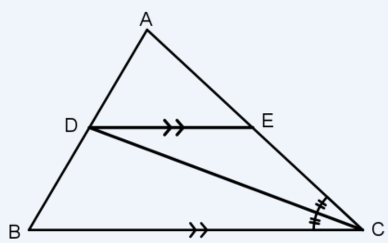
(7) على الشكل المجاور: شعاع من النور يخرج من النقطة S لينعكس عند النقطة P ليخرج في اتجاه النقطة T بحيث $\overleftrightarrow{RS}$ عمودي على $\overleftrightarrow{PT}$.
أوجد قيمة x.



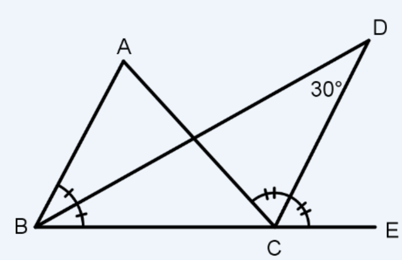
(8) على الشكل المجاور:
$\overleftrightarrow{RS} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$ ، $TU = TV$ ، $\angle SWV = 110°$.
أوجد $\angle QUV$.



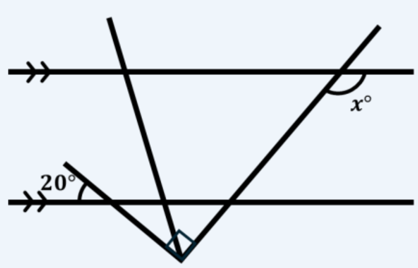
(9) على الشكل المجاور: CD ينصف $\angle ACB$ ،
$\angle B = 70°, \angle ACB = 40°$ ، $DE \parallel BC$.
أوجد قياس كل من $\angle EDC, \angle BDC$.



(10) على الشكل المجاور: منصف $\angle ABC$ ، ومنصف $\angle ACE$ يتقاطعان في نقطة D. فإذا كان $\angle BDC = 30°$.
أوجد قياس من $\angle A$.



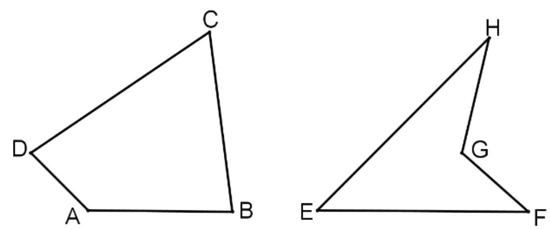
(11) على الشكل: أوجد قيمة x.



3- المضلعات:

المضلع هو شكل مغلق يمكن رسمه بوصل قطع مستقيمة في نهاياتها، تسمى كل من النقاط رأساً وكل من القطع المستقيمة ضلعاً. زوايا المضلع هي الزوايا التي تنشأ عن تقاطع أضلاع متجاورة. أقطار المضلع هي القطع المستقيمة بين أي رأسين غير متتاليتين.

يكون المضلع محدباً إذا كان قياس أي زاوية داخليه له اقل من $180°$ كما بالشكل $ABCD$، بينما يكون مقعراً إذا كانت إحدى زواياه الداخلية أكبر من $180°$ كما بالشكل $EFGH$ ،

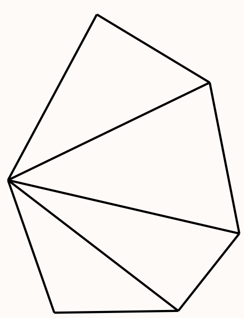


وعليه يمكننا أن نقول إن المثلث هو مضلع مكون من ثلاثة أضلاع والرباعي هو مضلع مكون من أربعة أضلاع والخماسي هو مضلع مكون من خمسة أضلاع والسداسي هو مضلع مكون من ستة أضلاع وهكذا.

ملاحظات:

- مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه n يساوي $(n-2)\times 180°$.

ولإثبات ذلك اختر أي رأس من رؤوس المضلع وارسم جميع أقطاره من هذه النقطة. إن ذلك يقسم المضلع إلى $n-2$ من المثلثات. وبهذا فإن مجموع زوايا المضلع الداخلية هو مجموع هذه المثلثات وهذا بدوره يساوي $(n-2)\times 180°$.



- المضلع المنتظم هو مضلع محدب جميع أضلاعه متطابقة وقياس جميع زواياه متساوٍ. ولذا، إذا كان عدد أضلاع (زوايا) المضلع المنتظم هو n فإن قياس كل من زواياه الداخلية يساوي:

$$\frac{(n-2)\times 180°}{n}$$

- مجموع الزوايا الخارجية لمضلع منتظم = $360°$

تدريبات:

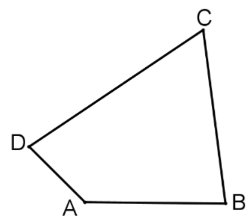
(1) أوجد مجموع الزوايا الداخلية لمضلع عدد أضلاعه:

15 $(a$ ، 16 $(b$ ، 17 $(c$

(2) أوجد قياس الزاوية الداخلية لكل مضلع منتظم من:

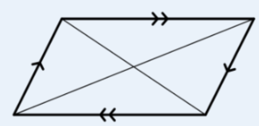
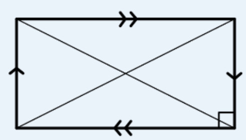
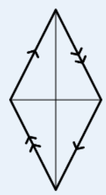
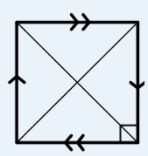
15 ضلعًا $(a$ ، 16 ضلعًا $(b$ ، 17 ضلعًا $(c$

4- الرباعيات:

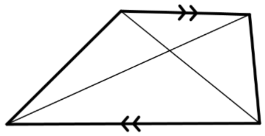


الرباعي هو مضلع مكون من أربعة رؤوس. أي أن الرباعي $ABCD$ هو اتحاد القطع المستقيمة $\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DA}$ حيث أي ثلاث نقاط يجب ألا تكون على استقامة واحدة ومجموع قياسات زواياه يساوي $360°$.

ويمكننا أن نلخص بعض خواص الاشكال الرباعية الخاصة فيما يلي:

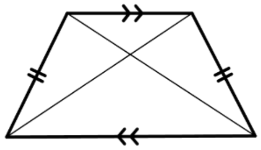
	متوازي الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
الشكل				
التعريف	متوازي الأضلاع هو رباعي محدب فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان	هو متوازي أضلاع إحدى زواياه (ومن ثم جميع زواياه) قائمة.	هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان ومن ثم فإن جميع أضلاعه متساوية.	هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان
الأضلاع	كل ضلعين متقابلين متساويين	كل ضلعين متقابلين متساويين	جميع أضلاعه متساوية	جميع أضلاعه متساوية
الزوايا	كل زاويتين متقابلتين متطابقتين	جميع زواياه متطابقة وكل منها يساوي $90°$	كل زاويتين متقابلتين متطابقتين	جميع زواياه متطابقة وكل منها يساوي $90°$
القطران	ينصف كل منهما الآخر	• ينصف كل منهما الآخر. • متساويان في الطول	• ينصف كل منهما الآخر. • متعامدان. • القطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما.	• ينصف كل منهما الآخر. • متساويان في الطول • متعامدان. • القطر ينصف زاويتي الرأس الواصل بينهما.
المساحة	القاعدة× الارتفاع	الطول ×العرض	القاعدة× الارتفاع	طول الضلع × نفسه
المحيط	مجموع أطوال الأضلاع	(الطول +العرض) × 2	طول الضلع ×4	طول الضلع ×4

تعريف 4-1



شبه المنحرف، هو شكل رباعي فيه ضلعين متقابلين فقط متوازيين.

تعريف 4-2

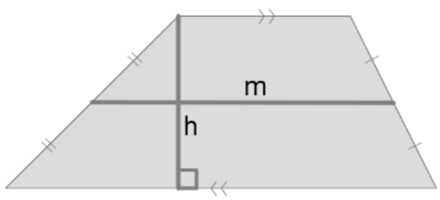


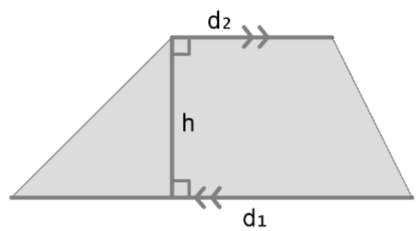
إذا تطابق الضلعين الغير متوازيين (الساقان) في شبة المنحرف فإنه يسمى شبه منحرف متطابق الضلعين(الساقين) ويتساوى قطراه وتتساوى زاويتي قاعدته.

نظرية 4-1

مساحة شبة المنحرف = $A = \frac{1}{2}h(d_1 + d_2)$

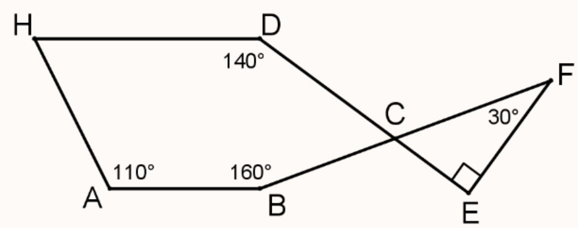
أو القاعدة المتوسطة في الارتفاع.$(A = h \cdot m)$





أمثلة:

(1) على الشكل أدناه: لدينا المستقيمان DE, BF يتقاطعان في نقطة C ، بحيث أن EF عمودي على DE ، $\angle HAB =$ $110°, \angle ABC = 160°$ ، $\angle HDC = 140°, \angle CFE = 30°$. أثبت أن $AB \parallel HD$.



الحل:

في ΔFEC القائم في $\angle$E ، بما أن $\angle CFE = 30°$.

إذن

$$\angle FCE = 180° - (30° + 90°) = 60°.$$

إذن بالتقابل بالرأس

$$\angle DCB = 60°.$$

وبما أن الشكل $ABCDH$ شكلا خماسيا، إذن مجموع قياسات زواياه الداخلة:

$$= (n-2) \times 180°$$
$$= (5-2) \times 180°$$
$$= 3 \times 180°$$
$$= 540°$$

إذن

$$\angle H = 540° - (110° + 160° + 60° + 140°)$$
$$\angle H = 540° - 470°$$
$$\angle H = 70°$$

وبما أن

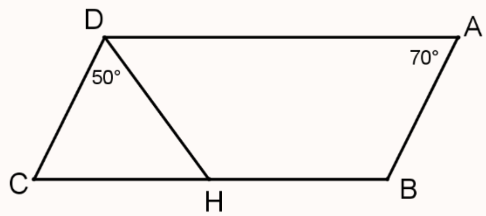
$$\angle H + \angle A = 70° + 110° = 180°.$$

وهما زاويتان داخلتان وفي جهة واحدة من القاطع AH ، إذن

$$AB \parallel HD.$$

(2) على الشكل: $ABCD$ متوازي أضلاع فيه H تقع على الضلع BC ، $\angle A = 70°$ ،$\angle CDH = 50°$ ،

أوجد قياس$\angle BHD$.



الحل:

بما أن $ABCD$ متوازي أضلاع

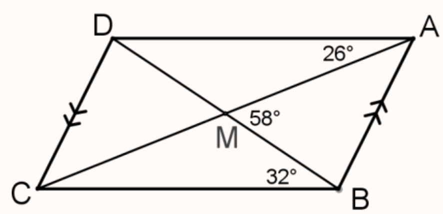
إذن $\angle C = \angle A = 70°$ (زاويتان متقابلتان في متوازي أضلاع)

وبما أن $\angle DHB$ خارجة عن المثلث DHC ، إذن

$$\angle DHB = \angle C + \angle CDH$$
$$\angle DHB = 50° + 70°$$
$$\angle DHB = 120°$$

(3) على الشكل: $ABCD$ رباعي تقاطع قطراه M ، $AB \parallel CD$ ،$\angle MBC = 32°$, $\angle AMB = 58°$،

$\angle CAD = 26°$. أثبت أن $ABCD$متوازي أضلاع.



الحل:

بما أن $\angle AMB$ خارجة عن المثلث CMB ، إذن

$$\angle AMB = \angle MBC + \angle MCB.$$

إذن

$$58° = 32° + \angle MCB \Rightarrow \angle MCB = 26°.$$

إذن

$\angle CAD = \angle MCB$وهما في وضع تبادل.

إذن $AD \parallel BC$ ، وبما أن $AB \parallel CD$

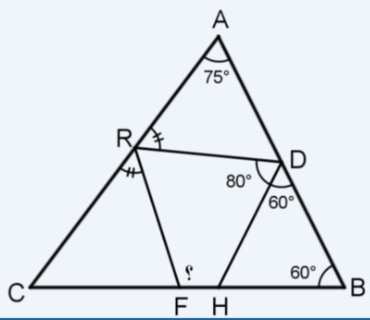
إذن $ABCD$ متوازي أضلاع.

تدريبات:

(**1**) على الشكل:

$\triangle ABC$ فيه $\angle BAC = 75°$, $\angle HDR = 80°$ $\angle BDH = \angle ABC = 60°$، $\angle ARD = \angle FRC$

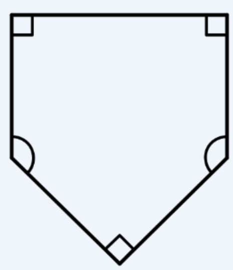
أوجد قياس $\angle HFR$.



(**2**) في لعبة البيسبول الأمريكية تمثل قاعدة اللعب شكلا خماسيا (كما بالشكل المجاور)

يتكون من ثلاثة زوايا قائمة وزاويتين متطابقتين

أوجد قياس هاتين الزاويتين.



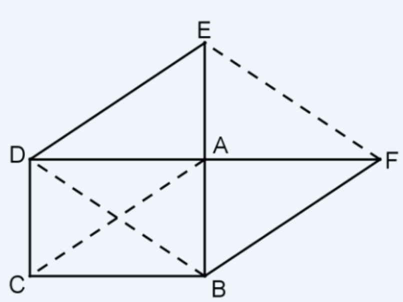
(**3**) سطحا معين وشبه منحرف متساويان في المساحة فإذا كان طول ضلع المعين 10 وطول القاعدة المتوسطة لشبه المنحرف 15 فأوجد النسبة بين ارتفاعيهما.

(القاعدة المتوسطة في شبه المنحرف هي القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف).

(**4**) شبه منحرف طول إحدى قاعدتيه المتوازيتين يساوي 3 أمثال طول القاعدة الأخرى

فإذا كان ارتفاعه يساوي طول قاعدته المتوسطة ومساحته 100. أوجد طولا قاعدتيه المتوازيتين.

(**5**) على الشكل أدناه: $ABCD$ مستطيل، $ACDE, ACBF$ متوازيا أضلاع أثبت أن $BD \parallel EF$.



الوحدة الثالثة: نظرية الاعداد

مقدمة في نظرية الأعداد: قابلية القسمة والتحليل إلى العوامل الأولية

هذا الملف عبارة عن دليل تمهيدي للعمليات الأساسية في قابلية قسمة الأعداد الصحيحة والتحليل إلى العوامل الأولية. سنستعرض مجموعة من قواعد قابلية القسمة العملية، ونعرّف الأعداد الأولية والمؤلفة، ونؤسس لأهم نظرية في علم الأعداد: النظرية الأساسية في الحساب. أخيرًا، سنطبق هذه المفاهيم لنوضح كيف أن التحليل إلى عوامل هو أداة قوية لتبسيط التعبيرات الرياضية المعقدة.

١- قواعد قابلية القسمة:

قبل الخوض في موضوع التحليل، من المفيد أن يكون لدينا مجموعة من القواعد لتحديد ما إذا كان عدد ما يقبل القسمة على عدد آخر بسرعة. بشكل رسمي، نقول إن العدد الصحيح a يقسم العدد الصحيح b, ونكتب $a \mid b$، إذا كان هناك عدد صحيح k بحيث $b = ak$.

قابلية القسمة على 2

يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان رقمه الأخير زوجيًا $(0, 2, 4, 6, 8)$.

مثال: العدد 538 يقبل القسمة على 2 لأن رقمه الأخير هو 8.

قابلية القسمة على 3

يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3.

مثال: العدد 741 يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه $(1 + 4 + 7 = 12)$ 12، و12 يقبل القسمة على 3.

قابلية القسمة على 4

يقبل العدد القسمة على 4 إذا كان العدد المكون من رقميه الأخيرين يقبل القسمة على 4.

مثال: العدد 1,824 يقبل القسمة على 4 لأن العدد 24 يقبل القسمة على 4.

قابلية القسمة على 5

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان رقمه الأخير 0 أو 5.

مثال: العدد 9,875 يقبل القسمة على 5 لأن رقمه الأخير هو 5.

قابلية القسمة على 6

يقبل العدد القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على كل من 2 و 3.

مثال: العدد 432 يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 (الرقم الأخير 2) وعلى 3 (مجموع الأرقام 9).

قابلية القسمة على 9

يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

مثال: العدد 2,853 يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه 18، و18 يقبل القسمة على 9.

قابلية القسمة على 10

يقبل العدد القسمة على 10 إذا كان رقمه الأخير 0.

مثال: العدد 12,340 يقبل القسمة على 10.

قابلية القسمة على 11

يقبل العدد القسمة على 11 إذا كان المجموع التبادلي (طرح الخانات في الأماكن الفردية من الخانات في الأماكن الزوجية) لأرقامه يقبل القسمة على 11.

مثال: لنأخذ العدد 54,384. المجموع التبادلي هو $5 - 4 + 3 - 8 + 4 = 0$. بما أن 0 يقبل القسمة على 11، فإن العدد 54,384 يقبل القسمة على 11.

مثال:

أمامك ثلاثة أعداد. كل عدد منها يقبل القسمة على أحد الأعداد التالية: 7، 9، أو 11. صل كل عدد بالقاسم المناسب.

الأعداد هي:

(**1**) 819045
(**2**) 792143
(**3**) 16926

الحل:

لحل هذه المسألة، سنقوم بتطبيق قواعد قابلية القسمة على كل عدد لتحديد المقسوم عليه الصحيح.

1) اختبار العدد 819,045

سنبدأ باختبار قابلية القسمة على 9 لأنها الأسهل.

قاعدة قابلية القسمة على 9: يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9.

مجموع خانات العدد 819045:

$$8 + 1 + 9 + 0 + 4 + 5 = 27$$

النتيجة: بما أن 27 تقبل القسمة على 9 ، فإن العدد 819,045 يقبل القسمة على 9.

إذا، العدد 819045 يقبل القسمة على 9.

2) اختبار العدد 792143

هذا العدد يبدو معقدًا، لذا قاعدة قابلية القسمة على 11 هي مرشح جيد للاختبار.

قاعدة قابلية القسمة على 11: يقبل العدد القسمة على 11 إذا كان المجموع التبادلي لأرقامه يقبل القسمة على 11.

التطبيق: لنحسب المجموع التبادلي لأرقام العدد 792143:

$$3 - 4 + 1 - 2 + 9 - 7 = -1 + 1 - 2 + 9 - 7 = 0 - 2 + 9 - 7 = -2 + 2 = 0$$

النتيجة: بما أن 0 يقبل القسمة على 11 ، فإن العدد 792143 يقبل القسمة على 11.

إذا، العدد 792143 يقبل القسمة على 11.

بما أننا وجدنا العددين الذين يقبلان القسمة على 9 و 11،إذا يجب أن يكون العدد الأخير 16926 هو الذي يقبل القسمة على 7

2- الأعداد الأولية:

جميع الأعداد الصحيحة الأكبر من 1 هي إما أعداد أولية أو أنها مركبة من حاصل ضرب أعداد أولية.

تعريف (العدد الأولي): العدد الأولي هو عدد صحيح أكبر من 1 وقواسمه الموجبة الوحيدة هي 1 ونفسه.

أمثلة على الأعداد الأولية: (2,3,5,7,11,47,97)

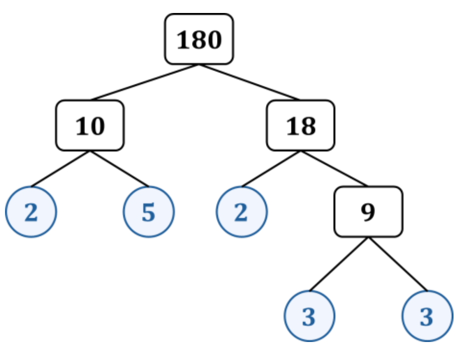
تعريف (العدد المركب): العدد المركب هو عدد صحيح أكبر من 1 وليس أوليًا.

أمثلة على الأعداد المؤلفة: (4,9,15,27,180,588)

النظرية الأساسية في الحساب: كل عدد صحيح أكبر من 1 هو إما عدد أولي، أو يمكن تمثيله كحاصل ضرب أعداد أولية، وهذا التمثيل فريد باستثناء ترتيب العوامل.

3- طرق التحليل إلى العوامل الأولية:

طريقة شجرة العوامل



مثال:(تحليل العدد 180) نحلل العدد 180 إلى أن نصل الى عوامله الأولية:

- لاحظ أن العدد 180 هو عبارة عن ضرب 10 و 18.
- نحلل الـ 18 كحاصل ضرب 9 و 2. والـ10 كحاصل ضرب 2 و 5.
- نحلل الـ 9 كحاصل ضرب 3 و 3.
- إذا تحليل الـ 180 هو عبارة عن ضرب الأعداد الأولية $5 \times 3^2 \times 2^2$.

$$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$$

طريقة القسمة المتكررة

مثال: (تحليل العدد 588) نقسم العدد على اقل عدد اولي يقسمه الى ان نصل الى 1. ثم نعد القواسم:

$588 \div 2 = 294$ $294 \div 2 = 147$ $147 \div 3 = 49$ $49 \div 7 = 7$ $7 \div 7 = 1$ إذا: $588 = 2^2 \times 3 \times 7^2$	أحيانا، نمثل طريقة القسمة المكررة بقسمة العمود لتسهيل الحسابات: $\begin{array}{r\|l} 2 & 588 \\ 2 & \mathbf{294} \\ 3 & 147 \\ 7 & 49 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$

4- كيف يسهل التحليل الحسابات:

تكمن القوة الحقيقية للتحليل في قدرته على كشف البنية الداخلية للأعداد، مما يمكننا من تبسيط العمليات الحسابية التي تبدو معقدة، مثل القسمة والجمع والطرح.

تبسيط القسمة (الكسور)

عند قسمة عددين كبيرين (أو تبسيط كسر)، فإن البحث عن العوامل المشتركة بينهما هو الطريقة المثلى.

مثال (بسّط الكسر):

$$\frac{396}{924}$$

الحل :

نحلل البسط والمقام باستعمال أحد الطرق لنحصل على:

$$396 = 2^2 \times 3^2 \times 11, \qquad 924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$$

إذا، عند قسمة العددين يمكننا اختزال العوامل الاولية المشتركة لنحصل على:

$$\frac{396}{924} = \frac{2^2 \times 3^2 \times 11}{2^2 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{2^2}{2^2} \times \frac{3^2}{3} \times \frac{1}{7} \times \frac{11}{11} = \frac{3}{7}$$

تدريبات:

(1) ما نتيجة العملية الحسابية $(18-20) \div (18+20)$ ؟

$(A)18$ $(B)19$ $(C)20$ $(D)34$ $(E)\ 36$

(2) أي من الأرقام التالية هو الأقرب إلى ناتج العملية $\frac{17\times0.3\times20.16}{999}$ ؟

$(A)\ 0.01$ $(B)\ 0.1$ $(C)\ 1$ $(D)\ 10$ $(E)\ 100$

(3) يعلم مصطفى أن $1111 \times 1111 = 1234321$. ما هي النتيجة التي يحصل عليها عند حساب 2222×1111؟

$(A)\ 3456543$ $(B)\ 2345432$ $(C)\ 2234322$ $(D)\ 2468642$ $(E)\ 4321234$

(4) ما هو الرقم الذي يجب أن يحل محل النجمة $(\star)$ لتكون المعادلة التالية صحيحة $7\cdot\star\cdot 6 = 14\cdot 18\cdot 2$ ؟

$(A)\ 8$ $(B)\ 9$ $(C)\ 10$ $(D)\ 12$ $(E)\ 15$

(5) أي الكسور التالية أصغر من 2؟

$(A)\frac{19}{8}$ $(B)\frac{20}{9}$ $(C)\frac{21}{10}$ $(D)\frac{22}{11}$ $(E)\frac{23}{12}$

(6) أي العبارات التالية صحيحة؟

$(A)\frac{4}{1} = 1.4$ $(B)\frac{5}{2} = 2.5$ $(C)\frac{6}{3} = 3.6$ $(D)\frac{7}{4} = 4.7$ $(E)\frac{8}{5} = 5.8$

(7) 2016 ساعة كم تساوي من الأسابيع؟

$(A)\ 6$ $(B)\ 8$ $(C)\ 10$ $(D)\ 12$ $(E)\ 16$

(8) لدى حمزة 20 ريالا، وكل من أشقائه الأربعة لديه 10 ريالات. كم يجب على حمزة أن يعطي كل شقيق من أشقائه حتى يتساوى المبلغ عند كل منهم؟

$(A)\ 2$ $(B)\ 4$ $(C)\ 5$ $(D)\ 8$ $(E)\ 10$

(9) سدس الجمهور في مسرح للأطفال هم من البالغين، والباقي أطفال. خمسا $(\frac{2}{5})$ الأطفال هم فتيات. ما هو الكسر الذي يمثل الأولاد من إجمالي الجمهور؟

$(A)\frac{1}{2}$ $(B)\frac{1}{3}$ $(C)\frac{1}{4}$ $(D)\frac{1}{5}$ $(E)\frac{2}{5}$

(10) أربعة أبناء عمومة أعمارهم 3, 8, 12, 14 سنة. فاطمة أصغر من خلود. مجموع عمري سلوى وفاطمة يقبل القسمة على 5، وكذلك مجموع عمري سلوى وخلود يقبل القسمة على 5. كم عمر إيناس (ابنة العم الرابعة)؟

$(A)14$ $(B)12$ $(C)8$ $(D)3$ (E) لا يمكن التحديد

(11) إذا ضربت الخانات الثلاثة لعدد مكون من ثلاث خانات، ستحصل على 135. ما هي النتيجة التي ستحصل عليها بجمع هذه الأرقام الثلاثة؟

$(A)\ 14$ $(B)\ 15$ $(C)\ 16$ $(D)\ 17$ $(E)\ 18$

(12) مستطيل مساحته $12\ cm^2$. أطوال أضلاعه أعداد طبيعية. أي محيط يمكن أن يكون للمستطيل؟

$(A)\ 20\ cm$ $(B)\ 26\ cm$ $(C)\ 28\ cm$ $(D)\ 32\ cm$ $(E)\ 48\ cm$

(13) أحمد وعلي يلعبان لعبة؛ يكتب أحمد ثلاثة أرقام من خانة واحدة على السبورة. يجمعهم علي فيحصل على 15 . ثم يحذف أحد الأرقام الثلاثة ويستبدله بالرقم 3 . يضرب أحمد هذه الأرقام الثلاثة الجديدة ويحصل على 36 . ما هو الرقم الذي من الممكن أن علي حذفه في الخطوة الثانية من اللعبة؟

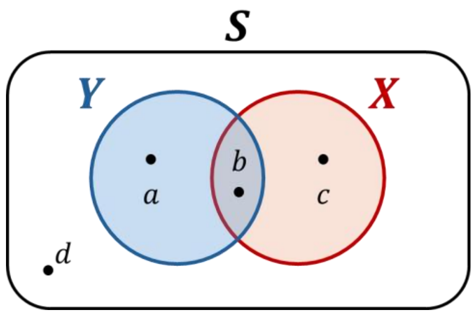
$(A)6$ $(B)7$ $(C)8$ $(D)6\ or\ 7$ $(E)7 or\ 8$

الوحدة الرابعة: التركيبـــــات

علم العد (التركيبات)

١- العد باستخدام آشكال فن:

تستخدم أشكال فن لحل مسائل العد التي تتضمن أنواع متداخلة في الصفات. وعادة تمثل الأنواع بدوائر متداخلة، في كل جزء منها عدد يمثل عدد العناصر من هذا النوع كما في الرسم التوضيحي:



a يحقق الخاصية Y فقط

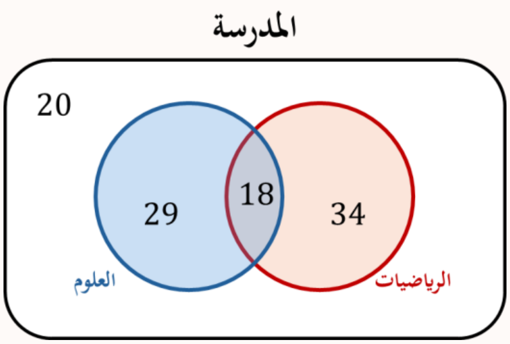
c يحقق الخاصية X فقط

b يحقق الخاصيتين X وY معاً

d لا يحقق الخاصية X ولا يحقق الخاصية Y (لا يحقق أي من الخاصيتين X أو Y)

مثال:

الشكل التالي يمثل أعداد الطلاب في مدرسة والذين يفضلون حصة الرياضيات والذين يفضلون حصة العلوم.



a) كم عدد الطلاب الذين يفضلون الرياضيات؟ ....

b) كم عدد الطلاب الذين يفضلون العلوم أو الرياضيات؟ ....

c) كم عدد الطلاب الذين يفضلون العلوم والرياضيات معاً؟ ....

d) كم عدد الطلاب الذين يفضلون العلوم فقط؟ ....

e) كم عدد الطلاب الذين لا يفضلون العلوم؟ ....

f) كم عدد طلاب المدرسة؟ ....

الحل:

a) $18 + 34 = 52$
b) $29 + 18 + 34 = 81$
c) 18
d) 29
e) $18 + 34 + 20 = 72$
f) $18 + 34 + 29 + 20 = 101$

تدريبات:

(1) في أحد فصول الموهوبين لدينا 35 طالبًا، تم تقديم عرض للطلاب بتعلم لغة أجنبية وهي الإنجليزية والفرنسية. أختار 15 طالب اللغة الإنجليزية، واختار 5 طلاب اللغتين معًا. إذا علمت أن أي طالب أختار تعلم أحد اللغتين على الأقل، فكم عدد الطلاب الذين اختاروا تعلم اللغة الفرنسية فقط؟

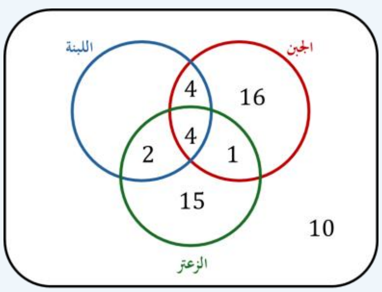
(2) ذهب 40 شخص في رحلة، 18 منهم يفضلون فطيرة الجبن و15 منهم يفضلون فطيرة اللبنة، بينما 12 منهم لا يفضلون أي من النوعين. كم عدد الطلاب الذين يفضلون النوعين معًا؟

(3) تم عمل استفتاء لـ50 طالبًا في مدرسة لمعرفة نوع الرياضة المفضلة لديهم، وكانت النتيجة أن 33 منهم يفضلون لعبة كرة القدم و24 يفضلون كرة السلة و11 منهم يفضلون اللعبتين معًا.
كم عدد الطلاب الذين لا يفضلون أي من اللعبتين؟

(4) يظهر في الشكل توزيع طلاب مدرسة فيها 60 طالب،

حسب تفضيلهم لثلاثة أنواع من الفطائر.

كم عدد الطلاب الذين يفضلون اللبنة؟



(5) عمل مدير مصنع دراسة على ثلاثة منتجات من المصنع، فوجد أن 38 شخصًا أحبوا المنتج "أ"، و36 أبدوا إعجابهم بالمنتج "ب"، و39 أعجبهم المنتج "ج"، وإن 24 شخصًا أحبوا المنتجين "أ" و"ب"، و 20 شخصًا أحبوا المنتجين "ج" و"أ"، و18 شخصًا أحبوا المنتج "ب" و"ج"، وأخيرًا 9 أشخاص أحبوا جميع المنتجات الثلاثة.
ما عدد الأشخاص الذين أحبو المنتج "ج" فقط؟

2- عد قائمة من الأعداد:

من السهل عد الأعداد في القائمة $1,2,3,4, \dots ,50$ ولذلك تسمى قائمة بسيطة، ومن هنا يمكن القول إن قائمة الأعداد بسيطة إذا حققت الشرطين:

1- تبدأ بالعدد 1 .

2- الأعداد المتجاورة متتالية.

مثال:

كم عدد الأعداد في القائمة $3,6,9, \dots ,327$

الحل:

القائمة ليست بسيطة لكن يمكن تحويلها إلى قائمة بسيطة بقسمة جميع الأعداد في القائمة على 3 لتصبح

$\div 3$	$3,6,9, \dots ,327$	
	$1,2,3, \dots ,109$	قائمة بسيطة

إذاً عدد الأعداد يساوي 109

مثال:

كم عدد الأعداد في القائمة $23,28,33, \dots ,548$

الحل:

القائمة ليست بسيطة لكن يمكن تحويلها إلى قائمة بسيطة بالخطوات التالية

-3	$23,28,33, \dots ,548$	
$\div 5$	$20,25,30, \dots ,545$	
-3	$4,5,6, \dots ,109$	
	$1,2,3, \dots ,106$	قائمة بسيطة

إذاً عدد الأعداد يساوي 106

ويمكن تحويل بعض القوائم لقائمة بسيطة بإجراء عملية على جميع الأعداد فيها، وذلك لأن العمليات على جميع الأعداد تنتج قائمة لها نفس العدد من الأعداد.

وسنرى في التدريبات القادمة تدريبات توضح ذلك.

تدريبات:

(1) كم عدد الأعداد في القائمة:

$1,2,3,\ldots,1440$؟

(2) كم عدد الأعداد في القائمة:

$8,9,\ldots,2019$؟

(3) كم عدد الأعداد في القائمة:

$5,9,13,\ldots,505$؟

(4) كم عدد الأعداد الزوجية الموجبة الأقل من 2025؟

(5) كم عدد الأعداد في القائمة التالية:

$$\frac{3}{7},1,\frac{11}{7},\ldots,289$$

(6) كم عدد الأعداد بين 2023,63 ومن مضاعفات العدد 3؟

(7) كم عدد صحيح موجب أقل من 600 بحيث يكون مربعاً كاملاً؟

(8) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 1447 والتي من مضاعفات العدد 3 ومن مضاعفات العدد 5؟

(9) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 2025 والتي من مضاعفات العدد 7 وليست من مضاعفات العدد 5؟

(10) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 500 والتي من مضاعفات العدد 7 وليست أعداد زوجية؟

الحلـــــــول

حلول (الجبر)

الأعداد الصحيحة وخواصها:

تدريبات:

(1)

$a)\ (-4) + 9 = 5$
$b)\ -42 \div 7 = -6$
$c)\ (2)^5 = 32$
$d)\ (-4)^3 = -64$
$e)\ (-5)^2 = 25$
$f)\ |0| = 0$
$g)\ (-4) \times (-8) = 32$
$h)\ -8 - (-5) = -8 + 5 = -3$
$i)\ -1 - 4 + 7 = 2$
$j)\ 2 \times 4 + 6 \times 5 = 8 + 30 = 38$
$k)\ |-6| = 6$
$m)|-3| - |-7| = 3 - 7 = -4$

(2)

$a)\ a^2 \times a^5 = a^{2+5} = a^7$
$b)\ x^7 \div x^3 = x^{7-3} = x^4$
$c)\ (a^3)^4 = a^{3\times4} = a^{12}$
$d)\ (x^2)^3 \times (x^4)^5 = x^{2\times3} \times x^{4\times5} = x^6 \times x^{20} = x^{26}$
$e)\ \dfrac{a^3 \times a^7}{a^2 \times a^6} = \dfrac{a^{3+7}}{a^{2+6}} = \dfrac{a^{10}}{a^8} = a^{10-8} = a^2$
$f)\ \dfrac{a^4 \times a^5}{a^3 \times a^6} = \dfrac{a^{4+5}}{a^{3+6}} = \dfrac{a^9}{a^9} = a^{9-9} = a^0 = 1$

(3)

$a)\ (-7) + (-12) - (-14) - (-15) - (-18) - (-38)$
$= -7 - 12 + 14 + 15 + 18 + 38$
$= 66$
$b)\ (-5)^2 + |-6| - (-1)^{1447}$
$= 25 + 6 + 1$
$= 32$

أسئلة التحدي:

(1)

$$\begin{aligned}&-1-(-1)^1-(-1)^2-(-1)^3-\cdots-(-1)^{99}-(-1)^{100}\\&=-1+\underbrace{(1-1+1-1+\cdots+1-1)}_{100\ terms}\\&=-1+0\\&=-1\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}&1234\times 9999\\&=1234(10000-1)\\&=1234\times 10000-1234\times 1\\&=12340000-1234\\&12338766\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}&5\{(2a-3)-[7(4a-1)-20]\}-(3-8a)\\&=5\{2a-3-28a+7+20\}-3+8a\\&=5\{-26a+24\}-3+8a\\&=-130a+120-3+8a\\&=-122a+117\end{aligned}$$

(4)

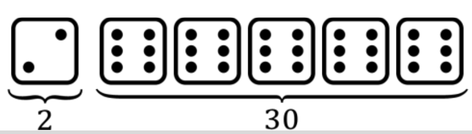
عدد الدورات خلال أسبوع يساوي عدد الساعات في الأسبوع تقسيم 7

$$=(24\times 7)\div 7=\frac{24\times 7}{7}=24$$

(5)

للحصول على أصغر عدد في أحد أحجار النرد، يجب أن يظهر على أحجار النرد الخمسة الأخرى أكبر عدد ممكن.

وبالتالي يتحقق ذلك عندما يظهر على كل من الأحجار الخمسة الأخرى العدد 6، ومن ثم يظهر أصغر عدد على الحجر السادس، وهو العدد 2.



(6)

$$\begin{aligned}&1-2+3-4+\cdots-100+101\\&=(1-2)+(3-4)+\cdots+(99-100)+101\\&=\underbrace{-1-1-1\ldots-1}_{50\ times}+101\\&=-50+101\\&=51\end{aligned}$$

مجموعة الأعداد النسبية $\mathbb{Q}$:

تدريبات:

(1)

$$a)\ \frac{2}{5}+\frac{1}{6}=\frac{12+5}{30}=\frac{17}{30}$$
$$b)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$$
$$c)\ \frac{-3}{8}\times\frac{4}{9}=\frac{-3}{9}\times\frac{4}{8}=\frac{-1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}$$
$$d)\ \frac{-3}{5}-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-3}{5}+\frac{1}{2}=\frac{-6+5}{10}=\frac{-1}{10}$$
$$e)\ 1\div 3\div 4\div 5=1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{60}$$
$$f)\ \frac{1}{9}-\frac{1}{10}=\frac{10-9}{90}=\frac{1}{90}$$
$$g)\ (-3)\div 4\times 6\div(-5)=-3\times\frac{1}{4}\times 6\times\left(-\frac{1}{5}\right)=\frac{18}{20}=\frac{9}{10}$$
$$h)\ \frac{-6}{35}\div\frac{2}{7}=\frac{-6}{35}\times\frac{7}{2}=\frac{-6}{2}\times\frac{7}{35}=\frac{-3}{1}\times\frac{1}{5}=\frac{-3}{5}$$
$$i)\ \left(\frac{-1}{2}\right)^5=\frac{(-1)^5}{2^5}=\frac{-1}{32}$$

(2)

$$a)\ 0.\overline{2}=\frac{2}{9}$$
$$b)\ 0.\overline{37}=\frac{37}{99}$$
$$\begin{aligned} c)\ 1.8\overline{23} &= \frac{18}{10}+\frac{1}{10}\times 0.\overline{23}\\ &=\frac{18}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{23}{99}\\ &=\frac{18}{10}+\frac{23}{990}\\ &=\frac{1805}{990}\\ &=\frac{361}{198}\end{aligned}$$

(3)

نعم، الادعاء صحيح، فعندما نقسم العدد $\frac{a}{b}$ على العدد $\frac{c}{d}$ فالناتج يساوي $\frac{d}{c} \times \frac{a}{b}$ أي يساوي الضرب في النظير الضربي للعدد $\frac{c}{d}$.

(4)

زعم صالح صحيح، فلنأخذ أي عددين نسبيين مثل

$$\frac{2}{7}, \frac{3}{7}$$

يبدو أنهما متقاربين وليس بينهما أي عدد نسبي،

والحقيقة غير ذلك، فلو أعدنا كتابتهما على الصورة

$$\frac{20}{70}, \frac{30}{70}$$

لبدا بينهما أعداد مثل

$$\frac{21}{70}, \frac{22}{70}, \dots, \frac{29}{70}$$

ولو أعدنا كتابتهما على الصورة

$$\frac{200}{700}, \frac{300}{700}$$

لبدا بينهما أعداد أكثر، وكلما كتبنا الكسر المكافئ مقامه أكبر ظهرت أعداد أكثر، وبالتالي بينهما عدد لا نهائي من الأعداد النسبية.

(5)

الترتيب التصاعدي (من اليسار لليمين):

$$-\frac{1}{3}, -0.3, -0.23$$

أسئلة التحدي:

(1)

في البداية نلاحظ أن:

$$\frac{1}{6}=\frac{5}{30} \text{ و } \frac{1}{3}=\frac{10}{30}$$

وبالتالي أي كسر محصور بينهما على الصورة

$$\frac{k}{30}$$

حيث k عدد زوجي سيكون مقامه 15، ومن ثم تأخذ k القيم 6 و 8 ، ولدينا كسران فقط.

(2)

نعلم أن

$$\frac{1}{4}=0.25$$

وبالتالي N يساوي ربع العدد 8، ومنها

$$N=2$$

وبالتالي يحصل خالد على 16

(3)

بالمجمل هيثم قد قطع النصف الأول من المشوار، بالإضافة لــ$\frac{3}{5}$ النصف الثاني، وبالتالي قطع إجمالا:

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{10}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$$

من مشواره.

(4)

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$$
$$=1+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right)-\frac{1}{10}$$
$$=1-\frac{1}{10}$$
$$=\frac{9}{10}$$

(5)

$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{4}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{5}}\cdot\ldots\cdot\frac{\cancel{79}}{80}$$
$$=\frac{1}{80}$$

(6)

A		7					e	d	c	7	b	4

لأن مجموع 7 و b و 4 يساوي 20، إذن $b = 9$.

بالمثل نجد $c + 7 + 9 = 20$ ، ومنها $c = 4$.

بالاستمرار على هذا المنوال من اليمين لليسار نجد $d = 9$ ، $e = 7$.

إلى أن نصل إلى $A = 9$.

(7)

عمر ليلى اليوم 32 عامًا، ومجموع عمر ابنتيها 5 سنوات. هذا يعني أن الفرق هو 27 عامًا لصالح ليلى. كل سنة يزيد عمر ليلى عامًا بينما يزيد مجموع عمري ابنتيها عامين. كل سنة تمر ينقص الفرق بين عمر ليلى ومجموع عمر ابنتيها بمقدار عام. ولأن الفرق الآن 27 عامًا، فسنحتاج إلى 27 عامًا حتى ينعدم الفرق. سيكون عمر ليلى وقتها 59 عامًا.

(8)

الحد الأقصى لعدد المباريات التي يمكن لأي فريق لعبها هو 2، لأن كل فريق يلعب فقط مرة واحدة في السنة على الأكثر وهناك 3 فرق فقط. لذلك يجب أن يكون الفريق B والفريق C كل منهما لعب مباراة واحدة فقط.

أما الفريق A فقد لعب مباراتين (لأنه لو لعبوا 0 مباراة، فسيكون لديه 0 هدف بينما بشروط السؤال قد سجل 5 أو 3 هدفا).

نظرًا لأن كل رقم سنضيف له أو نطرحه منه 1، فإن الفريق A قد فاز بـ 1، وتعادل 1، وخسر 0 (بما أن إجمالي عدد المباريات التي لعبت هو 2). بما أن الفريق A فاز مباراة واحدة، خسر الفريق B مباراة واحدة (لأن الفريق"B" خسر 0 مباراة في الأصل، وفريق C لا يمكن أن يخسر 2 مباريات). لذلك، وبالتالي الفريق B قد فاز وتعادل في 0 مباراة.

نستنتج الآن أن الفريق C تعادل مع الفريق A، وبالتالي فإن عدد المباريات التعادل له 1، بينما فاز وخسر 0 مباراة. نظرًا لأن المباراة الوحيدة للفريق C قد انتهت بالتعادل، فإن أهداف الفريق C لصالحه وضده متساوية. لذلك، أهداف فريق C لصالحه وعليه هي 2 هدفا.

المباراة الوحيدة للفريق B انتهت بخسارة، لذلك فإن أهداف الفريق B أقل من الأهداف التي عليه، ويتحقق ذلك عندما يكون له 1 هدفا وعليه 3 أهداف.

لأن الفريقين (B) و (C) كلاهما لعب مع الفريق (A) فقط، فإن عدد أهداف الفريق (A) يساوي مجموع عدد الأهداف التي على كل من الفريقين B و C. وبالتالي فإن عدد أهداف الفريق A هو 5. وبالمثل، فإن عدد أهداف الفريق A المسجلة عليه هي مجموع عدد أهداف لصالح الفريقين B و C وبالتالي عدد على الفريق A هو 3.

لذلك الجدول الصحيح هو:

الفريق	لعب	فاز	تعادل	خسر	أهدافه	أهداف عليه
A	2	1	1	0	5	3
B	1	0	0	1	1	3
C	1	0	1	0	2	2

حلول (الهندسة)

تدريبات التوازي:

(1)

$a)\ \angle 1 \cong \angle 4 \Longrightarrow RU||AT$.

$b)\ m\angle 2 \cong m\angle 10 \Longrightarrow$ لا يوجد توازي بالضرورة .

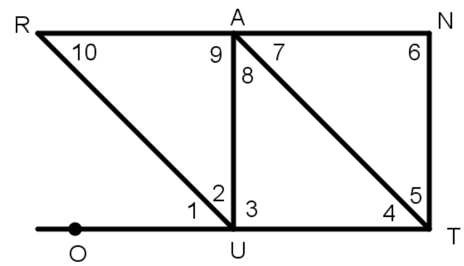
$c)\ m\angle 5 \cong m\angle 7 \Longrightarrow$ لا يوجد توازي بالضرورة .

$d)\ \angle 5 \cong \angle 8 \Longrightarrow AU||NT$.

$e)\ m\angle 6 = m\angle 9 = 90° \Longrightarrow AU||NT$.

$f)\ m\angle 6 = m\angle 3 = 90° \Longrightarrow$ لا يوجد توازي بالضرورة .

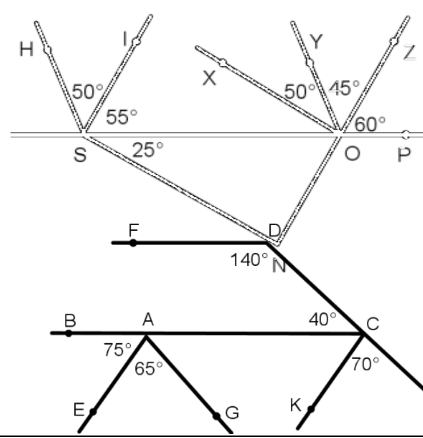
$g)\ m\angle 7 = m\angle 10 = m\angle 1. \Longrightarrow RU||AT\ , RA||OU$



(2)

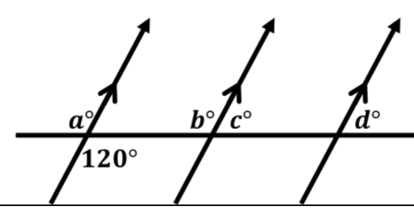
$\angle HSO = \angle YOP = 110 \Longrightarrow HS \parallel YO$
$\angle XOS = 180 - (60 + 45 + 50) = 25 = \angle NSO \Longrightarrow NS \parallel XO$

$\angle FDC + \angle DCA = 180 \Longrightarrow FD \parallel AC$
$\angle CAG = 180 - (75 + 65) = 40 = \angle DCA$
$\Longrightarrow DC \parallel AG$



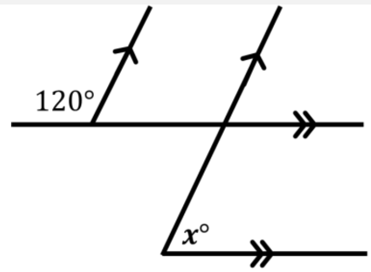
(3)

$\angle d = 180 - \angle a = 180 - 120 = 60°$



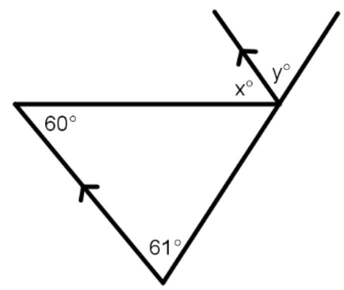
(4)

$x = 180 - 120 = 60°$



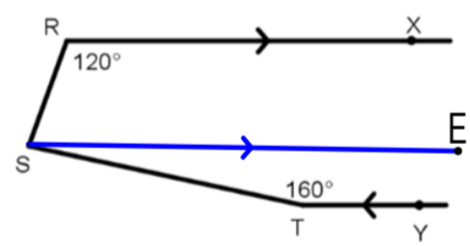
(5)

$x = 60°$
$y = 61°$



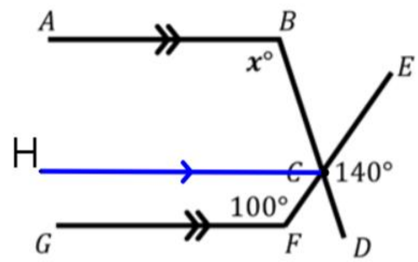
(6)

$\angle RSE = 180 - 120 = 60°$
$\angle TSE = 180 - 160 = 20°$
$\angle TSR = 60 + 20 = 80°$



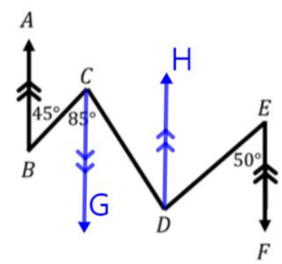
(7)

$\angle HCF = 180 - 100 = 80°$
$\angle HCB = 140 - 100 = 60°$
$x = 180 - 60 = 120°$



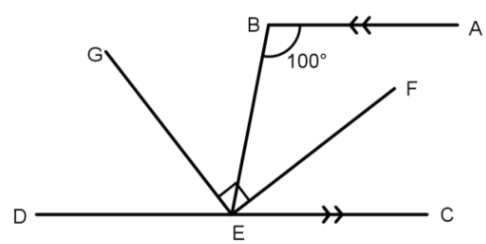
(8)

$\angle BCG = 45°$
$\angle DCG = 85 - 45 = 40°$
$\angle CDH = 40°$
$\angle EDH = 50°$
$\angle CDE = 50 + 40 = 90°$



(9)

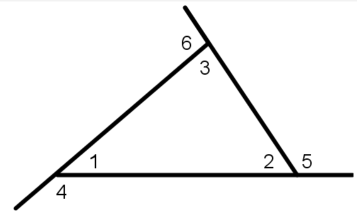
$\angle BEC = 180 - 100 = 80°$
$\angle BEF = \angle CEF = 80 \div 2 = 40°$
$\angle BEG = 90 - 40 = 50°$
$\angle DEG = 180 - (90 + 40) = 50°$



تدريبات المثلثات:

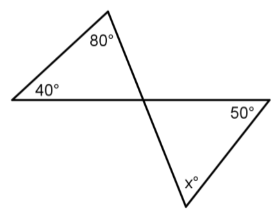
(1)

$a)\ m\angle 6 = 40 + 60 = 100°$
$b)\ m\angle 5 = 45 + 70 = 115°$
$c)\ m\angle 4 = 50 + 65 = 115°$
$d)\ m\angle 3 = 135 - 60 = 75°$
$e)\ m\angle 3 = 120 - 40 = 80°$
$b)\ m\angle 4 + m\angle 5 + m\angle 6 = 360°$



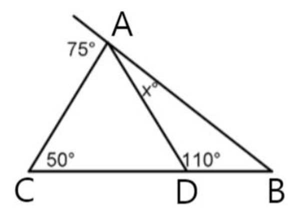
(2)

$40 + 80 + \angle A = x + 50 + \angle A$
$\Longrightarrow x = 80 + 40 - 50 = 70°$



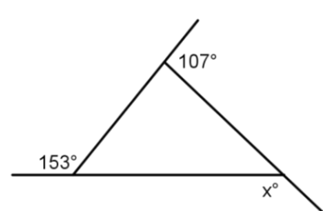
(3)

$\angle ABC = 75 - 50 = 25°$
$x = 180 - (110 + 25) = 45°$



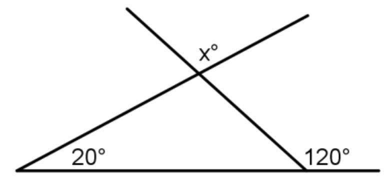
(4)

$x = 360 - (107 + 153) = 100°$



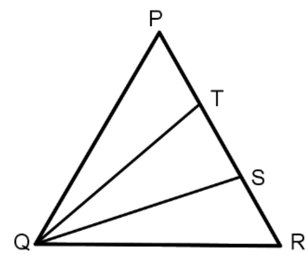
(5)

$x = 180 - (20 + 60) = 100°$



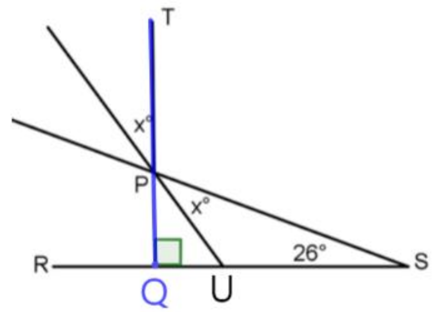
(6)

$\angle QPR = 60°$
$\angle PQR = 60 \div 3 = 20°$
$\angle QTP = 180 - (60 + 20) = 100°$



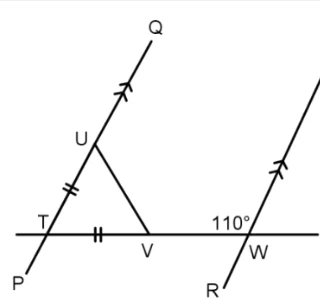
(7)

$\angle QPU = x$
$2x + 26 = 90$
$\Longrightarrow x = 32°$



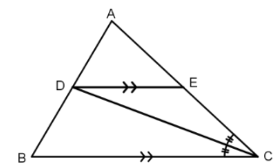
(8)

$\angle UTV = 180 - 110 = 70°$
$\angle TVU = \angle TUV = (180 - 70) \div 2 = 55°$
$\angle QUV = 180 - 55 = 125°$



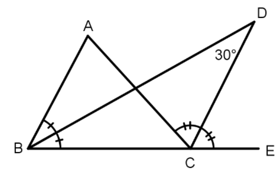
(9)

$\angle EDC = \angle DCB = 40 \div 2 = 20°$
$\angle BDC = 180 - (20 + 70) = 90°$



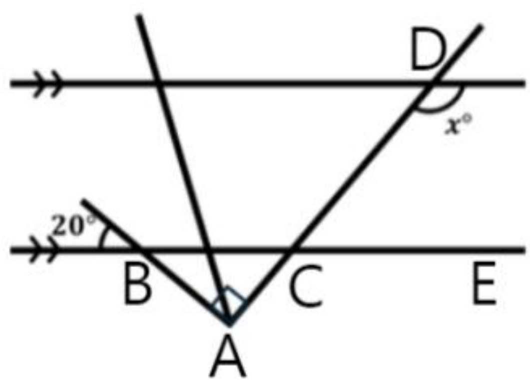
(10)

$\angle ECD = \angle DCA = y$
$\angle ABD = \angle DBC = x$
$y - x = 30$
$\angle A = 2y - 2x = 2(y - x) = 2 \times 30 = 60°$



(11)

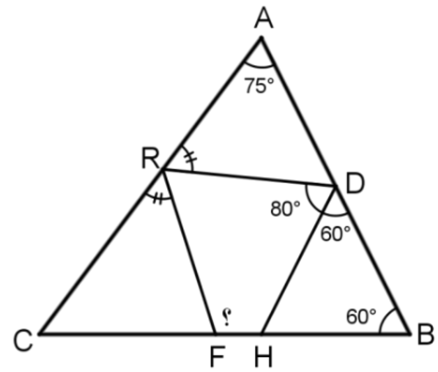
$\angle ABC = 20°$
$\angle ECD = \angle ACB = 90 - 20 = 70°$
$x = 180 - 70 = 110°$



تدريبات المضلعات الرباعية:

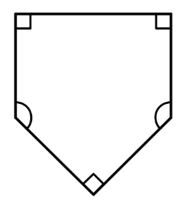
(1)

$\angle FHD = 60 + 60 = 120°$
$\angle ADR = 180 - (60 + 80) = 40°$
$\angle CRF = \angle RDA = 180 - (75 + 40) = 65°$
$\angle FRD = 180 - (65 + 65) = 50°$
$\angle HFR = 360 - (120 + 80 + 50) = 110°$



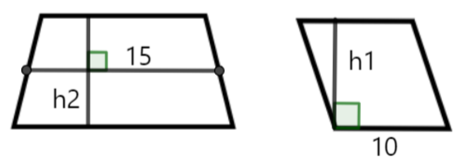
(2)

$3 \times 90° + 2x = (5 - 2) \times 180°$
$2x = 270°$
$x = 135°$



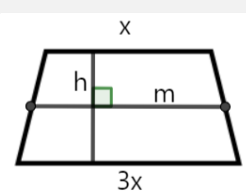
(3)

$15 \times h_1 = 10 \times h_2$
$\Longrightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

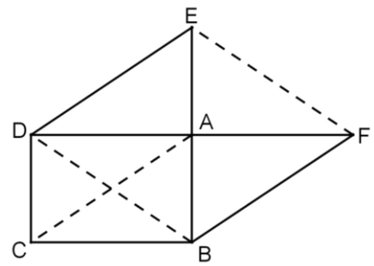


(4)

$h = m = \frac{x+3x}{2} = 2x$
$A = h \times m$
$(2x)(2x) = 100 \Longrightarrow 4x^2 = 100 \Longrightarrow x^2 = 25 \Longrightarrow x = 5 \ , 3x = 15$



(5)



$BF = CA = DE \Longrightarrow BF = DE$

$BF \parallel CA \parallel DE \Longrightarrow BF \parallel DE$

في الرباعي $DBFE$ ضلعان متقابلان متوازيان ومتطابقان

وهذا يعني أن $DBFE$ متوازي أضلاع

وبالتالي فإن $EF \parallel BD$

حلول (نظرية الأعداد)

تدريبات:

(1)

أولاً، نحسب ما بداخل الأقواس:

$$20 + 18 = 38$$
$$20 - 18 = 2$$

بعد ذلك، نقوم بعملية القسمة:

$$38 \div 2 = 19$$

الإجابة الصحيحة هي 19.

(2)

تعتمد هذه المسألة على التقدير لتبسيط الحسابات. نقرب الأعداد إلى أقرب قيمة سهلة:

$$17 \approx 20$$
$$20.16 \approx 20$$
$$999 \approx 1000$$

الآن تصبح العملية الحسابية التقريبية:

$$\frac{20 \times 0.3 \times 20}{1000} = \frac{120}{1000} = 0.12$$

الناتج 0.12 هو الأقرب إلى 0.1

الإجابة الصحيحة هي 0.1

(3)

يمكننا إعادة كتابة المسألة باستخدام التحليل. لاحظ أن $1111 \times 2 = 2222$. إذا، العملية تصبح:

$$1111 \times (2 \times 1111) = (1111 \times 1111) \times 2$$

بما أننا نعرف قيمة (1111×1111) من معطيات السؤال، نعوض بها:

$$1234321 \times 2 = 2468642$$

الإجابة الصحيحة هي 2468642.

(4)

نستخدم التحليل إلى العوامل الأولية لتبسيط طرفي المعادلة، تمامًا كما هو موضح في الدرس .

الطرف الأيسر:

$$2 \cdot (2 \cdot 3^2) \cdot (2 \cdot 7) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

الطرف الأيمن:

$$(2 \cdot 3) \cdot \star \cdot 7$$

بمساواة الطرفين، يمكننا إيجاد قيمة النجمة بالاختزال:

$$\star = \frac{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 7} = 2^{3-1} \cdot 3^{2-1} \cdot 7^{1-1} = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

الإجابة الصحيحة هي 12.

(5)

لمعرفة ما إذا كان الكسر أصغر من 2، نقارن البسط بضعف المقام.

$(A)\ 19 > 2 \times 8 = 16.$
$(B)\ 20 > 2 \times 9 = 18.$
$(C)\ 21 > 2 \times 10 = 20.$
$(D)\ 22 = 2 \times 11 = 22.$
$(E)\ 23 < 2 \times 12 = 24$

إذا الإجابة الصحيحة هي:

$\frac{23}{12}\ (E)$

(6)

نقوم بحساب قيمة كل كسر على حدة للتحقق من صحة العبارة:

(A) $\frac{4}{1} = 4$ وهي لا تساوي 1.4.

(B) $\frac{5}{2} = 2.5$ هذه العبارة صحيحة.

(C) $\frac{6}{3} = 2$ وهي لا تساوي 3.6.

(D) $\frac{7}{4} = 1.75$ وهي لا تساوي 4.7.

(E) $\frac{8}{5} = 1.6$ وهي لا تساوي 5.8.

الإجابة الصحيحة هي 2.5.

(7)

عدد الأيام في الأسبوع الواحد هو 7 أيام في الاسبوع وكل يوم فيه 24 ساعة .إذا المطلوب هو حساب $\frac{2016}{24\times7}$. يمكننا تبسيط هذا الكسر باستخدام قواعد قابلية القسمة:

الإجابة الصحيحة هي 12.

(8)

- المبلغ الإجمالي $60 = (4 \times 10) + 20$.
- عدد الأشخاص 5 .
- المبلغ المتساوي $12 = 5 \div 60$ ريال لكل شخص.
- كل شقيق يحتاج 12 ريال.

إذا، يجب على حمزة أن يعطي 2 ريال لكل شقيق.

الإجابة الصحيحة هي 2.

(9)

نسبة الأطفال $\frac{5}{6}$

نسبة الأولاد = نسبة الأطفال × نسبة الأولاد من نسبة الأطفال وهذا يساوي

$$\frac{5}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2}$$

الإجابة الصحيحة هي $\frac{1}{2}$

(10)

الأعمار هي {3,8,12,14}. بما أن عمر "سلوى" مشترك في عمليتي جمع ينتج عنهما مضاعف للعدد 5، نبحث عن عدد يكوّن مجموعًا يقبل القسمة على 5 مع عددين آخرين.

$3 + 12 = 15$ و $8 + 12 = 20$ إذًا، عمر سلوى هو 12. وعمري فاطمة وخلود هما 3 و 8 الأعمار المستخدمة هي 3,8,12.

العمر المتبقي لإيناس هو 14.

الإجابة الصحيحة هي 14.

(11)

المطلوب هو إيجاد ثلاثة أرقام (من 1 إلى 9) حاصل ضربها يساوي 135. أفضل طريقة هي التحليل إلى العوامل الأولية للعدد 135.

$$135 = 5 \times 27 = 5 \times 3 \times 9 = 5 \times 3 \times 3 \times 3$$

العوامل الأولية هي {3,3,3,5}. علينا تجميعها لتكوين ثلاثة أرقام فقط.

- لا يمكن أن يكون أحد الأرقام $5 \times 3 = 15$ لأنه ليس رقمًا واحدًا.
- يمكننا تجميع عاملين: $3 \times 3 = 9$.
- إذًا، الأرقام الثلاثة هي 9 والعاملان المتبقيان 3 و 5. الأرقام هي {3,5,9}. لنتحقق: $3 \times 5 \times 9 = 15 \times 9 = 135$

هذا صحيح. الآن، نجمع هذه الأرقام:

$$3 + 5 + 9 = 17$$

الإجابة الصحيحة هي 17.

(12)

المساحة = الطول × العرض = 12. بما أن الأضلاع أعداد طبيعية، فنحن نبحث عن أزواج عوامل العدد 12.

أزواج عوامل العدد 12 هي:

$$(1,12)\,,(2,6)\,,(3,4)$$

- إذا كانت الأبعاد 1 و 12 فالمحيط:

$$2 \times (1 + 12) = 26\ cm$$

- إذا كانت الأبعاد 2 و 6 المحيط:

$$2 \times (2 + 6) = 16\ cm$$

- إذا كانت الأبعاد 3 و 4 المحيط:

$$2 \times (3+4) = 14\ cm$$

من بين الخيارات المتاحة، المحيط الوحيد الممكن هو $26\ cm$.

الإجابة الصحيحة هي $26\ cm$.

(13)

لنفرض الأرقام الأصلية التي كتبها احمد هي x, y, z .

المعطى الأول: $x + y + z = 15$. حذف علي أحد الأرقام (لنقل z) واستبدله بـ 3. الأرقام الجديدة هي $x, y, 3$.

المعطى الثاني: $3 \cdot x \cdot y = 36$

من المعطى الثاني، يمكننا إيجاد x وy من المعادلة $x \cdot y = \frac{36}{3} = 12$ نحن نبحث عن رقمين من خانة واحدة بحيث حاصل ضربهما 12. الأزواج الممكنة هي: (3,4) , (2,6)

الآن، نستخدم المعطى الأول لإيجاد الرقم المحذوف z.

الحالة 1: إذا كان $x = 2, y = 6$

$$2 + 6 + z = 15 \implies 8 + z = 15 \implies z = 7$$

الرقم المحذوف يمكن أن يكون 7. الأرقام الأصلية كانت {2,6,7}.

الحالة 2: إذا كان $x = 3, y = 4$

$$3 + 4 + z = 15 \implies 7 + z = 15 \implies z = 8$$

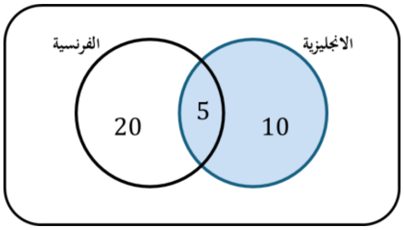
الرقم المحذوف يمكن أن يكون 8. الأرقام الأصلية كانت {3,4,8}. إذا، الرقم الذي حذفه علي يمكن أن يكون إما 8 أو 7.

الإجابة الصحيحة هي 7 أو 8.

حلول (تركيبات)

تدريبات العد باستخدام أشكال فن:

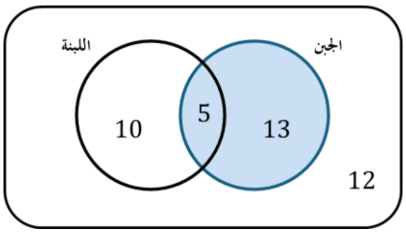
(1)



الذين اختاروا تعلم الفرنسية فقط =

$$35 - 15 = 20$$

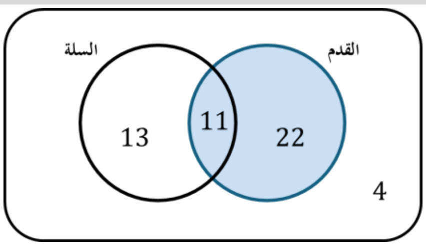
(2)



الذين يفضلون النوعين معاً =

$$12 + 18 + 15 - 40 = 5$$

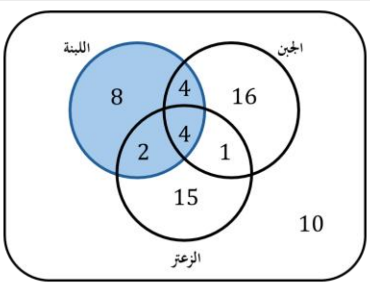
(3)



الذين لا يفضلون أياً من اللعبتين =

$$50 - (22 + 11 + 13) = 4$$

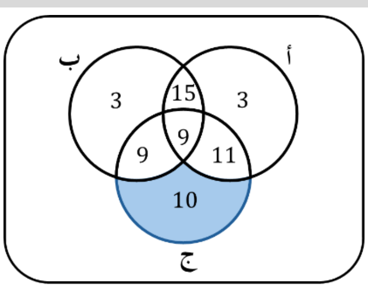
(4)



الذين يفضلون اللبنة =

$$60 - (16 + 1 + 15 + 10) = 18$$

(5)



الذين أحبوا المنتج (ج) فقط =

$$39 - (11 + 9 + 9) = 10$$

تدريبات عد قائمة من الأعداد:

(1)

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 1440

(2)

	$8,9,\ldots\ldots,2019$
-7	$1,2,\ldots\ldots,2012$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 2012،

(3)

	$5,9,13,\ldots\ldots,505$
-1	$4,8,12,\ldots\ldots,504$
$\div 4$	$1,2,3,\ldots\ldots,126$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 126،

(4)

	$2,4,6,\ldots\ldots,2024$
$\div 2$	$1,2,\ldots\ldots,1012$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 1012،

(5)

	$\frac{3}{7},1,\frac{11}{7}\ldots\ldots,289$
$\times 7$	$3,7,11,\ldots\ldots,2023$
$+1$	$4,8,12,\ldots\ldots,2024$
$\div 4$	$1,2,3,\ldots\ldots,506$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 506،

(6)

	$66,69,\ldots\ldots,2022$
-63	$3,6,\ldots\ldots,1959$
$\div 3$	$1,2,3,\ldots\ldots,653$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 653،

(7)

$$24^2=576<600\,,25^2=625>600$$

n	$1^2,2^2,\ldots\ldots,24^2$
$\sqrt{n}$	$1,2,\ldots\ldots,24$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 24،

(8)

المضاعفات المشتركة للعددين $\{5,3\}$ هي مضاعفات 15 وأكبر مضاعف لِـ 15 أقل من 1447 هو 1440

	$15,30, \dots \dots, 1440$
$\div 15$	$1,2, \dots \dots, 96$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 96،

حل آخر:

$$\left\lfloor \frac{1447}{15} \right\rfloor = 96$$

(9)

مضاعفات 7 التي أقل من 2025 هي

	$7,14, \dots \dots, 2023$
$\div 7$	$1,2, \dots \dots, 289$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 289،

سنستبعد منها المضاعفات المشتركة للعددين $\{5,7\}$ وهي مضاعفات 35 الأقل من 2025

	$35,70, \dots \dots, 1995$
$\div 35$	$1,2, \dots \dots, 57$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 57،

إذاً، عدد مضاعفات 7 وليس 5 =

$$289 - 57 = 232$$

حل آخر:

$$\left\lfloor \frac{2025}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2025}{35} \right\rfloor = 232$$

(10)

مضاعفات 7 التي أقل من 500 هي

	$7,14, \dots \dots, 497$
$\div 7$	$1,2, \dots \dots, 71$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 71،

سنستبعد منها المضاعفات المشتركة للعددين $\{2,7\}$ وهي مضاعفات 14 الأقل من 500

	$14,28, \dots \dots, 490$
$\div 14$	$1,2, \dots \dots, 35$

قائمة بسيطة عدد عناصرها هو 35،

إذاً، عدد مضاعفات 7 وليس 2 =

$$71 - 35 = 36$$

حل آخر:

$$\left\lfloor \frac{500}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{500}{14} \right\rfloor = 36$$