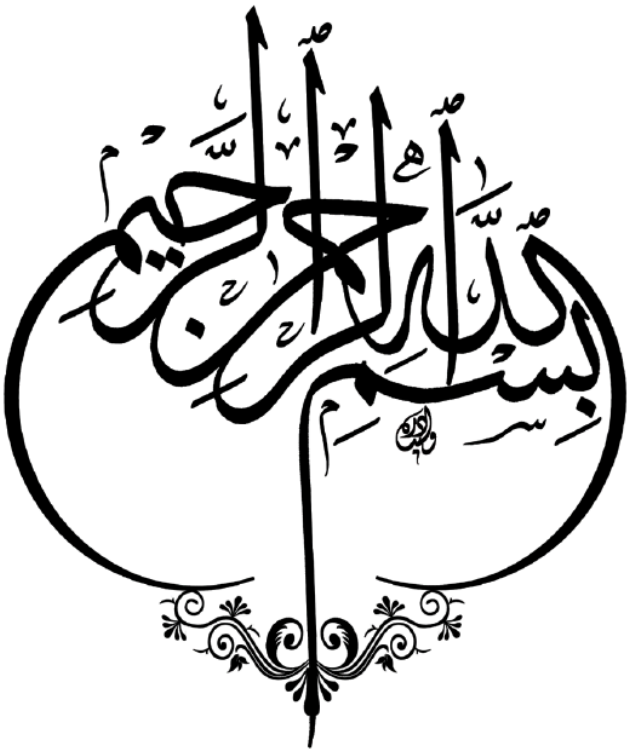
أولمبياد الموهبة الوطني
NATIONAL GIFTED OLYMPIAD

حقيبة المرحلة الثانية

المسار العلمي " نسمو "

رياضيات كبار

الفريق العلمي للرياضيات



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الفهرس

الموضوع	الصفحة
مقدمة	4
الوحدة الأولى: الجبـــــــــــر	5
النسبة المئوية	6
معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد	8
المعادلات الخطية في عدة متغيرات	12
الوحدة الثانية: الهندســـة	20
التشابه	23
تشابه المثلثات	26
الأطوال المتناسبة	32
الوحدة الثالثة: نظرية الأعداد	39
الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية	40
قابلية القسمة	45
الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة	47
الوحدة الرابعة: التركيبـــــات	50
مبادئ العد	51
عدد الأعداد والأشرطة	53
عدد الكلمات	56
التباديل	58
الإجابات	61

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

مقدمة

أبناؤنا وبناتنا المتميزون،

يسرّنا أن نهنئكم على اجتياز المرحلة الأولى وتأهلكم إلى **المرحلة الثانية**، وهي خطوة متقدمة في طريق التحدي والابتكار الرياضي.

تُعنى هذه الحقيبة بتوسيع مداركم في الفروع الأربعة الرئيسة: **التركيبات، والهندسة، والجبر، ونظرية الأعداد**، مع التركيز على المفاهيم المتقدمة في العدّ، والمراجعة الهندسية، والمعادلات الخطية، والتوزيع والضرب في نظرية الأعداد.

تهدف هذه المرحلة إلى صقل مهاراتكم في التفكير التحليلي وربط المفاهيم الرياضية ببعضها، مع تطبيقها في مواقف متنوعة.

وتُعد هذه الحقيبة فرصة لتعميق فهمكم للأنماط الرياضية واستخدام المنطق في التبرير وحل المسائل بأساليب منظمة.

نثق بقدراتكم ونتطلع لرؤيتكم تتألقون في هذه المرحلة المهمة من رحلتكم نحو التميز.

الفريق العلمي لأولمبياد الموهبة الوطني – المسار العلمي (نسمو) – مسار الرياضيات

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الوحدة الأولى: الجبـــــــــــــر



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

النسبة المئوية

هي ببساطة نسبة الجزء إلى الكل حيث إن الكل يساوي 100.
مثلًا 54% تعني 54 من أصل 100 وتكتب $\frac{54}{100}$
وتعطى بالعلاقة:

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{100}$$

حيث a تمثل x% من b.

فمثلًا لتحويل 3 من أصل 16 إلى نسبة مئوية نستخدم: $\frac{3}{16} = \frac{x}{100}$
وبضرب الطرفين في الوسطين، وبالتبسيط نحصل على: $x = 18\frac{3}{4}$
ونقول إنّ 3 تمثل 18.75% من 16

إذا زاد العدد x بمقدار k% فإنّ **مقدار العدد بعد الزيادة** يُعطى بالعلاقة:

$$x \cdot \left(1 + \frac{k}{100}\right)$$

إذا نقص العدد x بمقدار k% فإنّ **مقدار العدد بعد النقصان** يُعطى بالعلاقة:

$$x \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right)$$

مثال:

عندما ينقص عدد بنسبة 40%، يكون الناتج 36. ما هو العدد الأصلي؟

الحل:

لنفرض أن العدد هو x. لدينا:

$$x\left(1 - \frac{40}{100}\right) = 36$$

$$\Rightarrow \frac{6}{10}x = 36$$

$$\Rightarrow x = 60$$

إذن، العدد الأصلي هو 60.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) إذا كانت 120% من عدد ما هي 36، فما هو هذا العدد؟

(2) ما هي نسبة التخفيض لسلعة إذا تحول سعرها من 2890 ريالًا إلى 2023 ريالًا؟

(3) أحضرت نورا 60 قطعة من البسكويت إلى المدرسة، فأعطت معلماتها 40% منها، و25% من الباقي لصديقاتها، وأكلت ثلث ما تبقى. فكم قطعة بقيت معها؟

(4) إذا كانت النسبة بين قياس زوايا الخماسي الداخلية هي: $2 : 3 : 4 : 5 : 6$ فما قياس الزاوية الكبرى؟

(5) إذا كان b أكبر من a بنسبة 5%، وb أقل من c بنسبة 15%، فما نسبة a إلى c؟

(6) زِيدَ طول مستطيل بنسبة 50% وعرضه بنسبة 20%. ما نسبة الزيادة في مساحته؟

(7) في كل يوم 20% من السمك يباع في سوق السمك، إذا بقي 2000 سمكة في السوق عند نهاية يوم الثلاثاء، كم كان عدد السمك عند بداية يوم الاثنين؟

(8) إذا كان t يساوي 25% من u، فما نسبة $4t$ إلى $2u$؟

(9) إذا كان $xy : zx : yz = 1 : 2 : 3$، وكان:

$$\frac{x}{yz} : \frac{y}{zx} = 1 : k$$

فأوجد قيمة k.

(10) إذا كانت الأعداد x, y, z تحقق (حيث المقامات لا تساوي صفرًا):

$$\frac{7}{x+y} = \frac{k}{x+z} = \frac{11}{z-y}$$

فأوجد قيمة k.

(11) أوجد قيم $a, b, c \in \mathbb{N}$ التي تحقق:

$$\frac{a+1}{3} = \frac{b+2}{2} = \frac{8}{c+3}$$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد

لحل معادلة خطية في متغير واحد، نتبع الخطوات التالية بشكل مرتب:

التخلص من المقامات (إن وجدت)

إذا كانت هناك كسور في المعادلة، نضرب كل حد في **المضاعف المشترك الأصغر** (L.C.M) للمقامات للتخلص منها.

فك الأقواس

نستخدم قانون التوزيع لتبسيط الأقواس، مثل:

$$2\left(x+3\right)=2x+6$$

نقل الحدود

ننقل جميع الحدود التي تشمل المجهول في طرف وباقي الحدود في الطرف الآخر تبعًا للقاعدة:

لنقل حدود في معادلة من طرف لطرف آخر نعكس إشارتها والحدود غير المنقولة تظل إشارتها كما هي.

تجميع الحدود المتشابهة

بعد النقل، نبسط الحدود حتى تصبح المعادلة على الشكل:

$ax=b$ حيث a وb ثوابت.

القسمة على معامل المتغير

نقسم الطرفين على a (معامل المتغير) للحصول على الحل:

$$ax=b\Rightarrow x=\frac{b}{a}$$

مع ملاحظة أن:

> عندما $a\neq 0$ يكون لدينا حل وحيد:
>
> $$x=\frac{b}{a}$$
>
> عندما $a=0$ و$b\neq 0$ فلا يوجد حل.
> عندما $a=0$ و$b=0$ فإن أي عدد حقيقي هو حل للمعادلة.

للتحقق من الحل

نعوض قيمة المتغير الناتجة في المعادلة الأصلية: إذا تحققت المساواة فالحل صحيح، وإذا لم تتحقق فهناك خطأ في خطواتنا.

ملاحظة: أحيانًا لا نلتزم حرفيًا بالترتيب السابق عندما نجد حلًا أقصر.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

مثال:

حل المعادلة:

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1$$

الحل:

$$\frac{1}{10}\left\{\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8\right\}=1$$

بضرب الطرفين في 10

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]+8=10$$

بطرح 8 من الطرفين

$$\frac{1}{9}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16\right]=2$$

بضرب الطرفين في 9

$$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)+16=18$$

بطرح 16 من الطرفين

$$\frac{1}{5}\left(\frac{x+2}{3}+8\right)=2$$

بضرب الطرفين في 5

$$\frac{x+2}{3}+8=10$$

بطرح 8 من الطرفين

$$\frac{x+2}{3}=2$$

بضرب الطرفين في 3

$$x+2=6$$

بطرح 2 من الطرفين

$$x=4$$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) حل المعادلة:

$$1-\frac{x-\frac{1+3x}{5}}{3}=\frac{x}{2}-\frac{2x-\frac{10-6x}{7}}{2}$$

(2) إذا كان a,b,c أعدادًا ثابتة موجبة، حل المعادلة:

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3$$

(3) حل المعادلة:

$$(x-3)^2+(x+1)^2+(4x-5)^2=0$$

(4) حل المعادلة:

$$ax+b-\frac{5x+2ab}{5}=\frac{1}{4}$$

(5) إذا كانت المعادلة:

$$a(2x+3)+3bx=12x+5$$

لها عدد لا نهائي من الحلول للمتغير x، أوجد قيمة كل من a,b.

(6) إذا كانت المعادلة:

$$2a(x+6)=4x+1$$

ليس لها حلول، أوجد قيمة a.

(7) إذا كانت المعادلة: $kx=12$ لها حلول صحيحة موجبة، بحيث k عدد صحيح. أوجد عدد قيم k الممكنة.

(8) كم عدد قيم x الصحيحة الموجبة الممكنة التي تحقق المعادلة:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{13}{12}$$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(9) إذا كان $x = 4$ حلًا للمعادلة

$$3a - x = \frac{x}{2} + 3$$

فأوجد قيمة $(-a)^2 - 2a$.

(10) حل المعادلة:

$$\frac{x-n}{m} - \frac{x-m}{n} = \frac{m}{n}$$

بحيث: $mn \neq 0$ و $m \neq n$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

المعادلات الخطية في عدة متغيرات

يتكوّن نظام المعادلات الخطية من معادلتين أو أكثر تشترك في المتغيرات المجهولة نفسها (وفي أبسط الحالات معادلتان في متغيرين، عادةً x و y).

والهدف هو إيجاد الأزواج (x, y) التي تجعل كلتا المعادلتين صحيحتين في الوقت نفسه. ويمكنك أيضًا أن تنظر إلى المعادلتين على أنهما مستقيمان في المستوى الإحداثي، فيكون هدفنا إيجاد إحداثيات نقطة تقاطعهما.

خوارزمية الحذف

إن أكثر الطرق موثوقيةً ووضوحًا لحل هذه الأنظمة هي **طريقة الحذف**، والفكرة هي إجراء عمليات على المعادلتين بحيث يختفي أحد المتغيرين تمامًا عند جمعهما معًا.

مثال:

المعادلة 1: $2x + 3y = 12$

المعادلة 2: $3x - y = 7$

الخطوة 1: رتّب المتغيرات.

تأكّد من أن المعادلتين مكتوبتان بالصيغة نفسها؛ بحيث تقع حدود x في عمود واحد، تليها حدود y، ثم إشارتا المساواة، ثم الأعداد الثابتة. (المعادلتان في مثالنا مرتبتان ترتيبًا صحيحًا بالفعل).

الخطوة 2: اجعل المعاملين متساويين في القيمة ومتعاكسين في الإشارة.

انظر إلى معاملَي المتغير y: في المعادلة 1 المعامل هو 3 بإشارة موجبة، وفي المعادلة 2 المعامل هو 1 بإشارة سالبة. فإذا ضربنا جميع حدود المعادلة 2 في 3، فإن حدَّي y سيلغي كلٌّ منهما الآخر تمامًا عند جمع المعادلتين.

اضرب كل حد من حدود المعادلة 2 في 3:

فتصبح المعادلة 2: $9x - 3y = 21$

الخطوة 3: اجمع المعادلتين رأسيًا.

اكتب المعادلة 1 وتحتها المعادلة 2 بعد تعديلها، ثم اجمع رأسيًا عمودًا عمودًا:

$$2x + 3y = 12$$
$$9x - 3y = 21$$

ناتج الجمع هو:

$$11x + 0 = 33$$

وبذلك يكون المتغير y قد حُذف تمامًا.

الخطوة 4: أوجد قيمة المتغير المتبقي.

تتبقى لديك معادلة بسيطة في متغير واحد:

$$11x = 33$$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

اقسم الطرفين على 11 لعزل x:

$$x = 3$$

الخطوة 5: عوّض لإيجاد قيمة المتغير الثاني.

خذ القيمة التي توصلت إليها ($x = 3$) وعوّض بها في أيٍّ من المعادلتين الأصليتين لإيجاد قيمة y. ولنستخدم المعادلة 1:

$$2(3) + 3y = 12$$

$$6 + 3y = 12$$

اطرح 6 من الطرفين:

$$3y = 6$$

اقسم على 3:

$$y = 2$$

الحل النهائي للنظام هو $x = 3$، $y = 2$.

تحديد عدد الحلول

بدلًا من حفظ صيغ كسرية مجردة لتحديد عدد حلول النظام، يمكنك ببساطة أن تحكم على الأعداد بالتفكير المنطقي.

1. حل وحيد (مستقيمان متقاطعان)

هذه هي الحالة المعتادة؛ فنسب معاملات المتغيرات في المعادلتين مختلفة، ولذلك يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة فقط عند تمثيلهما بيانيًا.

مثال: المسألة التي حللناها أعلاه، والتي أعطت حلًا واحدًا فقط: $x = 3$، $y = 2$.

2. لا يوجد حل (مستقيمان متوازيان)

تحدث هذه الحالة عندما تكون المتغيرات في المعادلتين متطابقة (أو متناسبة تمامًا) بينما تتناقض النواتج النهائية فيما بينها؛ فيكون المستقيمان متوازيين ولا يتقاطعان أبدًا.

مثال:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 10 \end{cases}$$

من المستحيل رياضيًا أن يكون مجموع عددين 5 و 10 في آنٍ واحد؛ لذلك ليس لهذا النظام أي حل.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

3. عدد لا نهائي من الحلول (مستقيمان منطبقان)

تحدث هذه الحالة عندما تكون المعادلة الثانية مجرد ناتج ضرب المعادلة الأولى في عدد (أي صورة مضاعفة منها). ولأن المعادلتين تمثلان المستقيم نفسه تمامًا عند تمثيلهما بيانيًا، فإن كل نقطة على هذا المستقيم تمثل حلًا صحيحًا.

مثال:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

إذا قسمت المعادلة الثانية كلها على 2 فإنها تصبح مطابقة للمعادلة الأولى، وأي زوج من الأعداد مجموعهما 5 يحقق المعادلتين كلتيهما.

مثال:

كم عدد حلول كل نظام من الأنظمة الآتية؟

$$(a) \quad \begin{cases} 5x + 2y = 4 \\ 2.5x + y = 2 \end{cases} \qquad (b) \quad \begin{cases} 4x + 3y = 3 \\ 8x + 6y = 7 \end{cases}$$

الحل:

(a) عدد لا نهائي من الحلول: يمكن الحصول على المعادلة الثانية بقسمة المعادلة الأولى على 2، إذن فهما تمثلان المستقيم نفسه.

(b) لا يوجد حل: بضرب المعادلة الأولى في 2 نحصل على

$$8x + 6y = 6$$

وهذا لا يمكن أن يتحقق مع المعادلة الثانية (مستقيمان متوازيان).

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) كم عدد حلول النظام الآتي؟

$$\begin{cases} x+5y=3 \\ 2x+10y=6 \end{cases}$$

(2) حُلّ كلًّا من أنظمة المعادلات الآتية:

(a) $\begin{cases} x+y=13 \\ x-y=7 \end{cases}$ (b) $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x+4y=8 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x+y=14 \\ x-y=2 \end{cases}$ (d) $\begin{cases} 2x-y=6 \\ x+4y=21 \end{cases}$

(3) عددان مجموعهما 42 والفرق بينهما 8، فما العددان؟

(4) في وقتٍ ما، لاحظت ريما أن ساعتها الرقمية تشير إلى a دقيقة بعد الساعة الثانية، وبعد خمس عشرة دقيقة أشارت إلى b دقيقة بعد الساعة الثالثة. ولاحظت مستمتعةً أن a يساوي ستة أمثال b. فكم كانت الساعة عندما نظرت إلى ساعتها للمرة الثانية؟

(5) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} \frac{x-y}{5}-\frac{x+y}{4}=\frac{1}{2}, \\ 2(x-y)-3(x+y)+1=0 \end{cases}$$

(6) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} 5.4x+4.6y=104 \\ 4.6x+5.4y=96 \end{cases}$$

(7) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} x+2(5x+y)=16 \\ 5x+y=7 \end{cases}$$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(8) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \\ x + 3y + 6z = 15 \end{cases}$$

(9) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ y + 2z = 8 \\ z + 2u = 11 \\ u + 2x = 6 \end{cases}$$

(10) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} 5x - y + 3z = a \\ 5y - z + 3x = b \\ 5z - x + 3y = c \end{cases}$$

(11) إذا علمت أن $x = 2$ ،$y = 1$ هو حل النظام

$$\begin{cases} ax + by = 7, \\ bx + cy = 5 \end{cases}$$

فما العلاقة بين a, c؟

(12) أوجد قيمة (a, b, c) إذا كان للنظامين الآتيين الحل نفسه:

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \\ 2x + y - z = 0 \\ 4ax + 5by - z = -22 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - by + z = 8 \\ x + y + 5 = c \\ 2x + 3y = -4 \end{cases}$$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(13) حدّد قيم k التي تجعل نظام المعادلات

$$\begin{cases} kx - y = -\frac{1}{3} \\ 3y = 1 - 6x \end{cases}$$

(a) له حل وحيد. (b) ليس له حل. (c) له عدد لا نهائي من الحلول.

(14) إذا كانت x, y, z تحقق نظام المعادلات

$$\begin{cases} 2020(x-y) + 2021(y-z) + 2022(z-x) = 0 \\ 2020^2(x-y) + 2021^2(y-z) + 2022^2(z-x) = 2021 \end{cases}$$

فأوجد قيمة $z - y$.

(15) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} x - y - z = 5 \\ y - z - x = 1 \\ z - x - y = -15 \end{cases}$$

(16) حُلّ نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ y - z + u = 2 \\ z - u + v = 3 \\ u - v + x = 4 \\ v - x + y = 5 \end{cases}$$

@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

أسئلة التحدي:

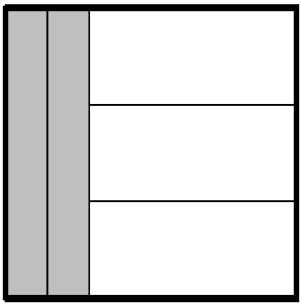
(1) حل نظام المعادلتين:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 6 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 14 \end{cases}$$

(2) حل نظام المعادلات:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ y + z = 4 \\ z + x = 6 \end{cases}$$

(3) أعطِ مثالًا لكسرين الفرق بينهما يساوي حاصل ضربهما.



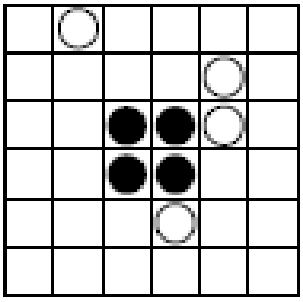
(4) الشكل المقابل عبارة عن مربع مكوّن من خمسة مستطيلات لها نفس المحيط. ما النسبة بين مساحة أحد المستطيلات المظللة ومساحة أحد المستطيلات غير المظللة؟

(5) نريد تقسيم مبلغ من المال بالتساوي بين مجموعة من الأطفال. إذا حصل كل طفل على 60 هللة فسيتبقى 2.10 ريال، بينما إذا زاد المبلغ 20 هللة فسيكفي تمامًا لكي يحصل كل طفل على 70 هللة. كم عدد الأطفال في المجموعة؟

(6) العدد 3600 يمكن كتابته على الصورة $2^a \times 3^b \times 4^c \times 5^d$، حيث a, b, c, d أعداد صحيحة موجبة.
إذا علمت أن $a + b + c + d = 7$، فما قيمة c؟

(7) لدينا العدد $123451234512345123451234512345$. إذا كان بإمكانك إزالة عشر خانات منه، فما أكبر عدد يمكنك الحصول عليه؟

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

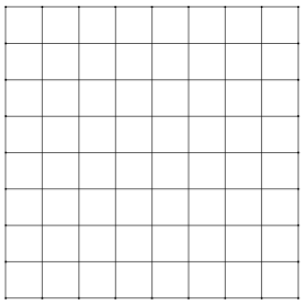


(8) قم بقطع الشكل المرفق إلى أربعة أجزاء متطابقة (في الشكل والمساحة) بحيث يحتوي كل جزء على دائرة سوداء واحدة ودائرة بيضاء واحدة.

(9) لدى أخي أربعة أطفال، أعمارهم 5 و8 و13 و15 سنة، وأسماؤهم (بدون ترتيب) محمد ورجاء ونجاح ونور. إحدى البنات في رياض الأطفال، ورجاء أكبر من محمد، ومجموع عمري رجاء ونور يقبل القسمة على ثلاثة.
هل نور ولد أم بنت؟

(10) هناك مئة شخص يعيشون على جزيرة، بعضهم كاذبون دائمًا والباقون صادقون دائمًا، ولكل ساكن فصل مفضل من فصول السنة. سُئل كل ساكن الأسئلة الأربعة الآتية:
- هل تحب الشتاء؟
- هل تحب الربيع؟
- هل تحب الصيف؟
- هل تحب الخريف؟

كانت هناك 25 إجابة بنعم على السؤال الأول، و25 على السؤال الثاني، و45 على السؤال الثالث، و55 على السؤال الرابع. كم عدد الكذابين في الجزيرة؟



(11) لدينا الجدول التالي من النوع 8×8 مقسّمًا إلى 64 مربعًا صغيرًا.
هل يمكنك تلوين 17 مربعًا صغيرًا باللون الأسود بحيث لا يشترك أي مربعين منها في ضلع أو حتى في رأس؟

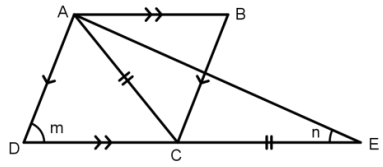
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الوحدة الثانية: الهندســـــة

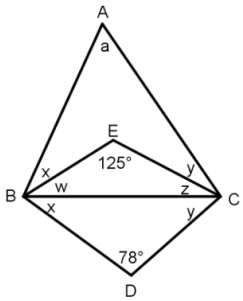


ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

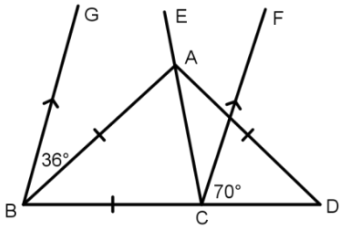
تدريبات مراجعة:



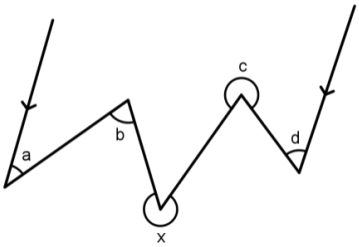
(1) على الشكل المجاور $ABCD$ معين، ACE مثلث متطابق الضلعين فيه $AC = CE$، وD, E, C تقع على استقامة واحدة. إذا كانت $\angle ADC = m$، $\angle AEC = n$، فكوّن معادلة تحوي m, n.



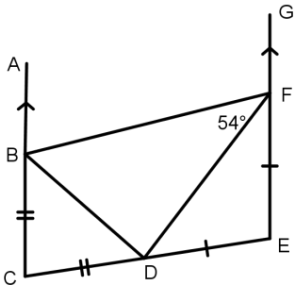
(2) على الشكل المجاور: $ABDC$ شكل رباعي، والنقطة E تقع داخله بحيث $\angle ACE = \angle DCB = y$، $\angle ABE = \angle DBC = x$. إذا كانت $\angle BEC = 125°$، $\angle BDC = 78°$، فأوجد $\angle A$.



(3) على الشكل المجاور: إذا كان $AB = BC = AD$، فأوجد قياس $\angle EAD$ باستخدام المعطيات الموضحة.

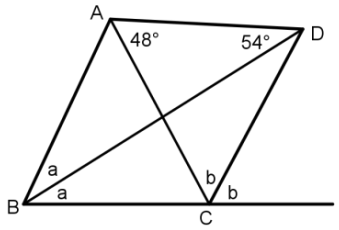


(4) على الشكل المجاور: عبّر عن قيمة x بدلالة a, b, c, d.

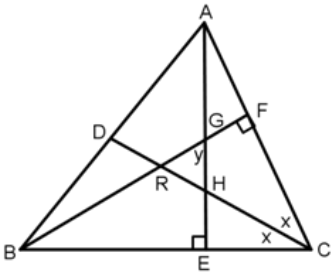


(5) على الشكل المجاور $BC = CD$، $DE = EF$، $AC \parallel GE$.
إذا كانت $\angle BFD = 54°$ فأوجد قياس $\angle DBF$.

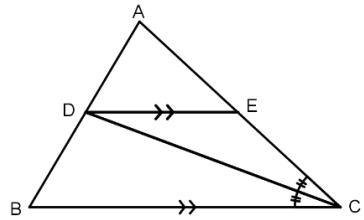
@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025



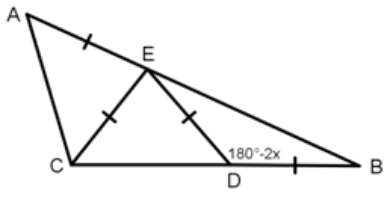
(6) على الشكل المجاور: مستخدمًا المعطيات الموضحة
(a) عبّر عن الزاويتين $\angle BAC, \angle BDC$ بدلالة a, b.
(b) إذا كانت $a = \frac{2}{3}b$ فأوجد a, b.



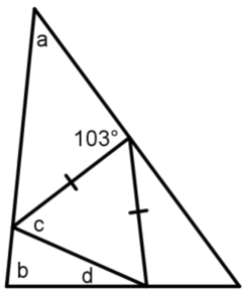
(7) على الشكل المجاور وباستخدام المعطيات الموضحة كوّن معادلة تحوي x, y.



(8) على الشكل المجاور: CD ينصف $\angle ACB$، $\angle ACB = 40°$، $\angle B = 70°$، $DE \parallel BC$. أوجد قياس كل من $\angle EDC, \angle BDC$.



(9) على الشكل $\triangle ABC$ فيه E, D تقعان على AB، BC على الترتيب، بحيث $AE = EC = DE = DB$. إذا كانت $\angle EDB = 180° - 2x$ فأوجد قياس $\angle ACE$ بدلالة x.

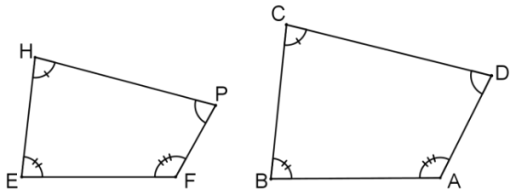


(10) على الشكل المجاور: إذا كان $a = \frac{2}{3}c = \frac{1}{2}b = 3d$ فأوجد a, b, c, d.

@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

التشابه

تعريف 1:



يتشابه أي مضلعين إذا تحقق الشرطان الآتيان:
(1) تساوي قياسات الزوايا المتناظرة. (2) تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

ففي المضلعين الموضحين بالشكل إذا كان:

$$\left\{\begin{array}{c} \angle A=\angle F \\ \angle B=\angle E \\ \angle C=\angle H \\ \angle D=\angle P \\ \frac{AB}{FE}=\frac{BC}{EH}=\frac{CD}{HP}=\frac{DA}{PF} \end{array}\right\} \Rightarrow ABCD \sim FEHP$$

نظرية 1:
النسبة بين طولي محيطي مضلعين متشابهين تساوي نفس نسبة التشابه بين أي ضلعين متناظرين فيهما.

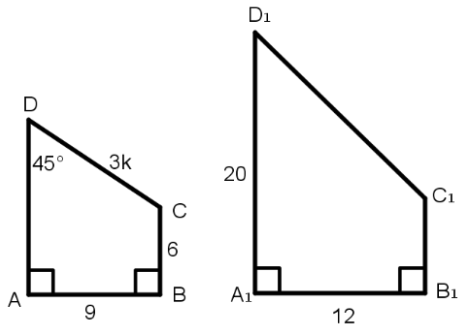
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

في التدريبات من 1 إلى 8 اختر الكلمة المناسبة من بين (دائمًا متشابهان – أحيانًا متشابهان – التشابه مستحيل):

التدريب	المضلعان	دائمًا متشابهان	أحيانًا متشابهان	التشابه مستحيل
(1)	مثلثان متطابقا الأضلاع.			
(2)	مثلثان متطابقا الضلعين.			
(3)	مربعان.			
(4)	معينان.			
(5)	مثلثان قائما الزاوية.			
(6)	مثلثان مختلفا الأضلاع.			
(7)	مستطيلان.			
(8)	مثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا.			

التدريبات من 9 إلى 16 على الشكل التالي: حيث الرباعي $ABCD \sim$ الرباعي $A_1B_1C_1D_1$.



(9) نسبة التشابه بين $ABCD$ و$A_1B_1C_1D_1$ تساوي .....

(10) ما هو نوع الرباعي $A_1B_1C_1D_1$؟ وضح إجابتك.

(11) قياس $\angle D_1$ يساوي .....

(12) قياس $\angle C_1$ يساوي .....

(13) C_1B_1 يساوي .....

(14) AD يساوي .....

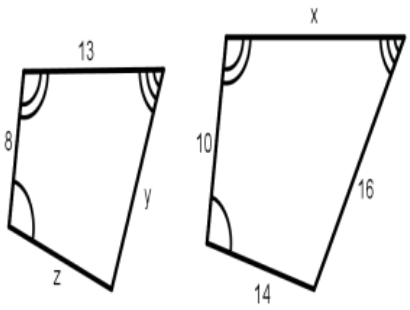
(15) C_1D_1 يساوي .....

(16) النسبة بين محيطي المضلعين تساوي .....

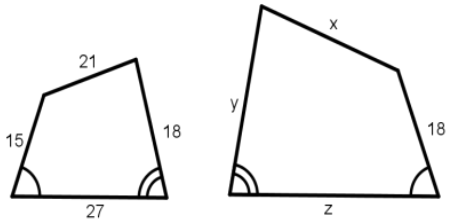
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

في التدريبين 17 و18 أوجد قيم x, y, z، علمًا بأن المضلعين في كل تدريب متشابهان.

(17)



(18)



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

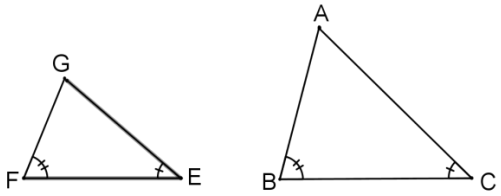
تشابه المثلثات

نظرية 2:
لكل مثلثين متشابهين:
(1) الأضلاع المتناظرة متناسبة.
(2) الارتفاعات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.
(3) المتوسطات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.

مسلمة التشابه (AAA)

نظرية 3:
مسلمة التشابه: AAA
يتشابه المثلثان إذا تساوت قياسات زوايا المثلث الأول مع الزوايا المناظرة لها في المثلث الآخر. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار (AAA). وبالطبع يكفي إثبات التشابه بتساوي زاويتين فقط (AA)، لأن ذلك يقتضي تساوي الزاوية الثالثة في كل مثلث.

على الشكل التالي:



في المثلثين ABC وGFE بما أن $\angle B = \angle F$ و$\angle E = \angle C$، إذن يتشابه المثلثان وينتج أن:

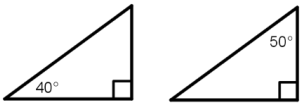
$$\frac{AB}{GF} = \frac{BC}{FE} = \frac{CA}{EG}$$

@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

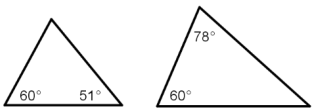
تدريبات:

في التدريبات من 1 إلى 9 حدد المثلثين المتشابهين، وإذا لم تتوصل لاستنتاج فاكتب «لا يمكن الاستنتاج».

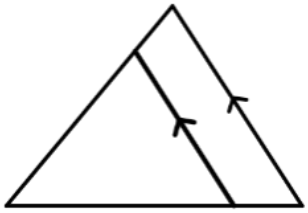
(1)



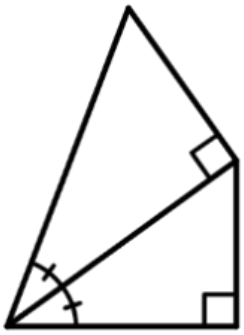
(2)



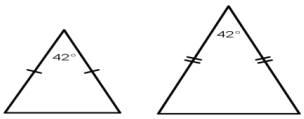
(3)



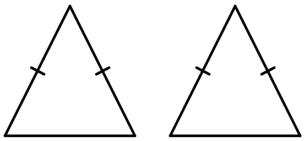
(4)



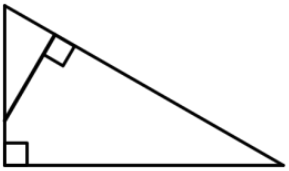
(5)



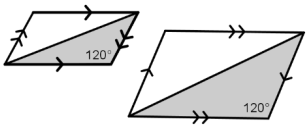
(6)



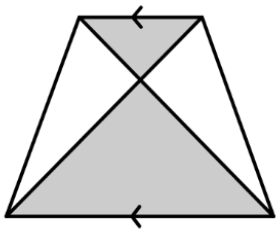
(7)



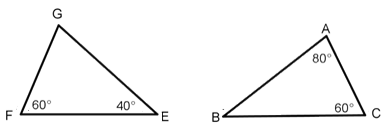
(8)



(9)



(10) انظر الشكل التالي ثم ضع الرموز على المثلثين وأكمل:

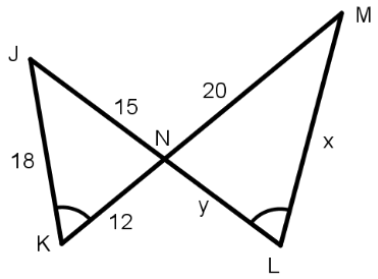


$\angle ABC =$ _____

$\triangle ABC \sim$ _____

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(11) انظر الشكل ثم أكمل:



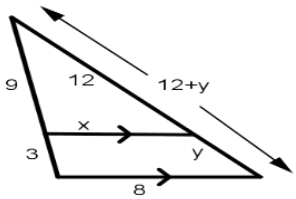
(a) $\triangle JKN \sim \ldots\ldots\ldots$

(b) $\frac{15}{\ldots} = \frac{12}{\ldots}$ ، $\frac{15}{\ldots} = \frac{18}{\ldots}$

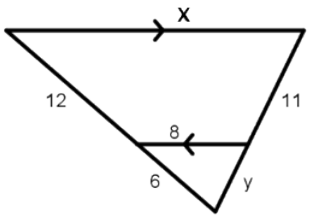
(c) $x = \ldots$ ، $y = \ldots$

في التدريبات من 12 إلى 14 أوجد قيمة x, y.

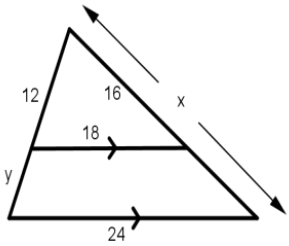
(12)



(13)



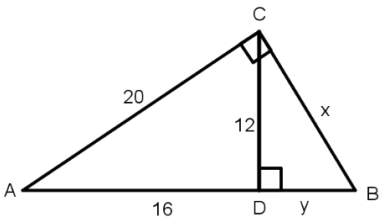
(14)



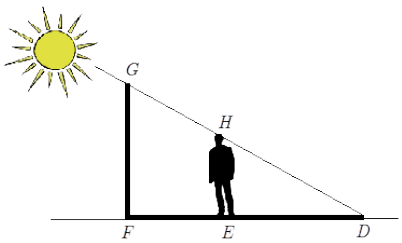
(15) على الشكل التالي:

(a) سمّ مثلثين يشابهان المثلث ABC

(b) أوجد قيمة x, y.

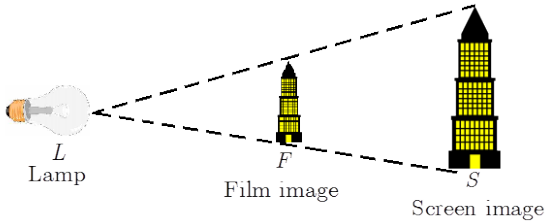


(16) لتقدير ارتفاع عمود كرة السلة، وقف أحد اللاعبين والذي طوله بالضبط يساوي 2 م بحيث تكون نهاية ظله مع نهاية ظل العمود منطبقتين تمامًا، وعند ذلك وجدنا أن $DF = 4.4$ م، $DE = 1.6$ م.
أوجد طول العمود.

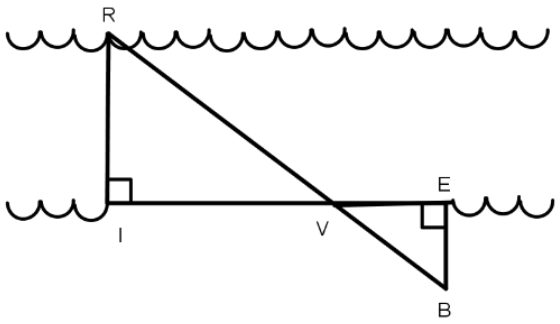


@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

(17) على الشكل التالي: القياسات ليست حقيقية، وفيه تظهر صورة البناية في الفيلم وعلى الشاشة، فإذا كانت $LF = 6$ سم، $LS = 24$ م، وكان طول البناية على الشاشة يساوي 2.2 م، فما طول البناية في الفيلم؟



(18) على الشكل التالي: إذا كان $IV = 63$ م، $VE = 20$ م، $BE = 15$ م، فأوجد عرض النهر IR.



@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

نظريات التشابه (SAS) و(SSS)

نظرية 4:
يتشابه المثلثان إذا ساوى قياس زاوية من مثلث قياس زاوية من مثلث آخر وتناسبت أطوال الأضلاع التي تحتوي هاتين الزاويتين. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار (SAS).

نظرية 5:
يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة. وسنطلق على هذه الحالة الاختصار (SSS).

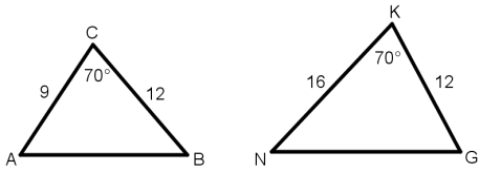
خلاصة:
لكل مثلثين متشابهين:
(1) الأضلاع المتناظرة متناسبة.
(2) الارتفاعات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.
(3) المتوسطات المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.
(4) منصفات الزوايا المتناظرة متناسبة ولها نفس نسبة التشابه.
(5) طولا محيطيهما لهما نفس نسبة التشابه.
(6) النسبة بين مساحتيهما تساوي مربع نسبة التشابه.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

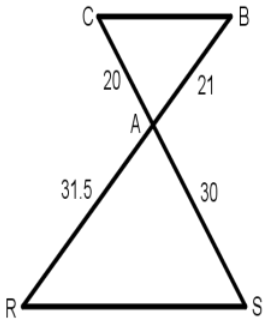
تدريبات:

في التدريبات من 19 إلى 24 حدد المثلثين المتشابهين، وكذلك النظرية أو النتيجة التي تثبت ذلك.

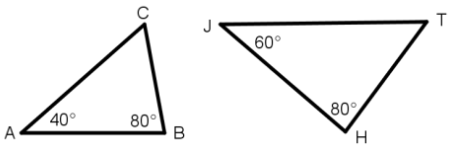
(19)



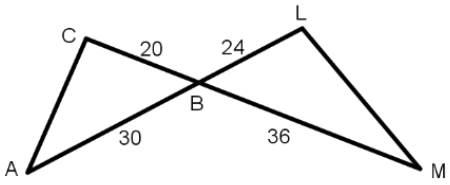
(20)



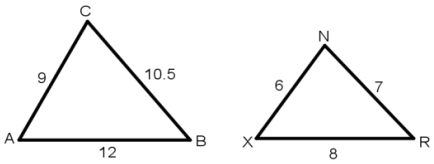
(21)



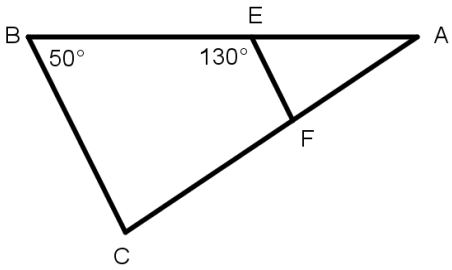
(22)



(23)



(24)



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الأطوال المتناسبة

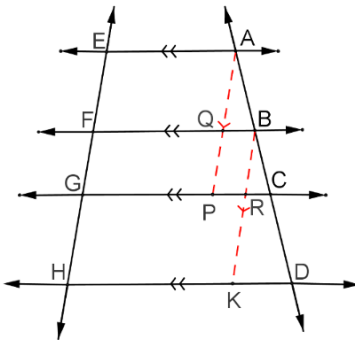
نظرية 6: (نظرية طالس العامة)
إذا قطع مستقيمان عدة مستقيمات متوازية فإن أطوال القطع الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع القطع الناتجة على القاطع الآخر.

البرهان:

لدينا هنا $AE \parallel BF \parallel GC \parallel HD$ يقطعهم المستقيمان AD, EH والمطلوب إثبات أن:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

ولبرهان هذه النظرية نرسم AP, BK يوازيان EH كما بالشكل المجاور.



وبما أن $AQFE$، $QPGF$، $BRGF$، $RKHG$ متوازيات أضلاع، إذن $AQ = EF$، $BR = QP = FG$، $RK = GH$.
في $\triangle APC$ نجد أن $BQ \parallel PC$
إذن

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AQ}{QP} \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{EF}{FG} \Rightarrow \frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG}$$

وبالمثل في $\triangle BKD$، نجد أن $CR \parallel KD$ فيمكننا الحصول على

$$\frac{BC}{CD} = \frac{BR}{RK} \Rightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{FG}{GH} \Rightarrow \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

إذن

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH}$$

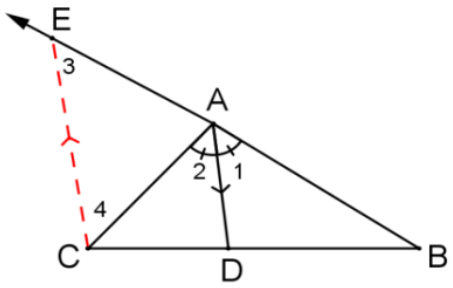
نظرية 7:
إذا رسم مستقيم يوازي ضلعًا من أضلاع المثلث ويقطع الضلعين الآخرين فإنه يقسمهما إلى قطع أطوالها متناسبة.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

نظرية 8: (نظرية منصف الزاوية)
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة له عند هذا الرأس قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزأين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي ضلعي المثلث الآخرين.

البرهان:

في شكل 1: الشعاع AD ينصف $\angle CAB$ ويقطع BC في D.
في شكل 2: الشعاع AF ينصف الزاوية الخارجة $\angle CAE$ ويقطع امتداد BC في F.
والآن المطلوب إثبات أن $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$. ولإثبات ذلك نرسم $CE \parallel AD$ يقطع امتداد BA في E.



شكل 1

إذن $\angle 1 = \angle 3$ (زاويتان متناظرتان)، و$\angle 2 = \angle 4$ (زاويتان متبادلتان).
وبما أن AD ينصف $\angle CAB$ فإن $\angle 2 = \angle 1$، إذن $\angle 3 = \angle 4$، ومن ذلك $AE = AC$.
وفي $\triangle BCE$ بما أن $AD \parallel EC$ فإن (نظرية 7):

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{DC}$$

وبما أن $AE = AC$ نصل إلى المطلوب:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

وبالطريقة نفسها في شكل 2: نرسم $CG \parallel AF$ يقطع AB في G، فيكون $AG = AC$، ومنه:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC}$$

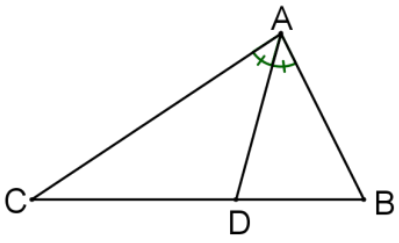
ملاحظات:

(1) يتحقق عكس النظرية فإذا كانت D تقسم BC بحيث

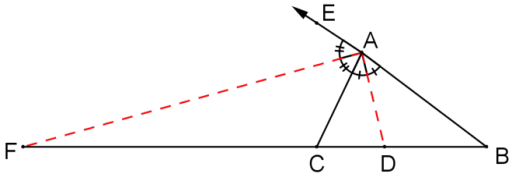
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

فإن AD ينصف $\angle A$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa



(2) AD, AF المنصفان الداخلي والخارجي للزاوية A على الترتيب.



شكل 2

من نظرية منصف الزاوية:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BF}{FC}$$

إذن

$$\frac{BF}{FC} = \frac{BD}{DC}$$

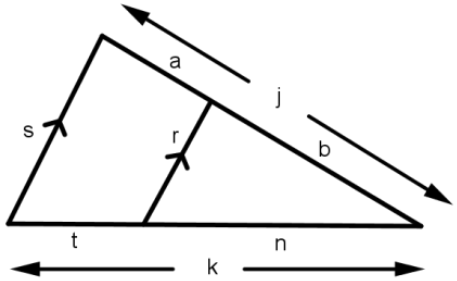
ملاحظة مهمة:

قياس الزاوية بين المنصفين الداخلي والخارجي للزاوية نفسها يساوي $90°$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

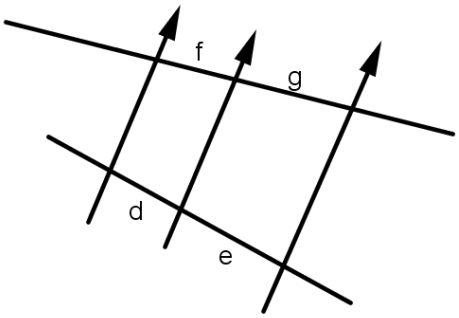
(1) انظر الشكل التالي، ثم حدد أي التناسبات التالية صحيحة.



الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{r}{s}=\frac{a}{b}$	
(b)	$\frac{t}{k}=\frac{a}{j}$	
(c)	$\frac{j}{a}=\frac{s}{r}$	
(d)	$\frac{r}{s}=\frac{n}{k}$	
(e)	$\frac{a}{b}=\frac{n}{t}$	
(f)	$\frac{b}{j}=\frac{t}{k}$	

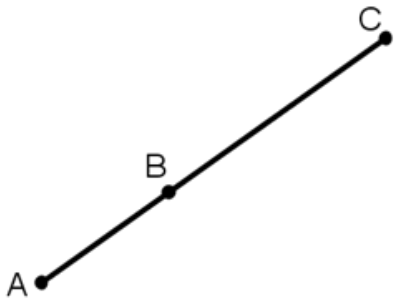
@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

(2) انظر الشكل التالي، ثم حدد أي التناسبات التالية صحيحة.



الفقرة	العبارة	قيمة الصواب
(a)	$\frac{d}{f}=\frac{g}{e}$	
(b)	$\frac{f}{g}=\frac{e}{d}$	
(c)	$\frac{g}{f}=\frac{e}{d}$	
(d)	$\frac{d}{f}=\frac{e}{g}$	

في التدريبات من 3 إلى 6 أكمل الجدول التالي إذا كان $\frac{AB}{BC}=\frac{3}{5}$.

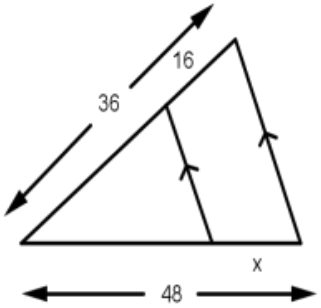


	(3)	(4)	(5)	(6)
AB	6			
BC		25		
AC			56	100

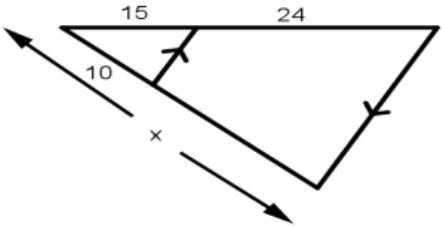
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

في التدريبات من 7 إلى 14 أوجد قيمة x.

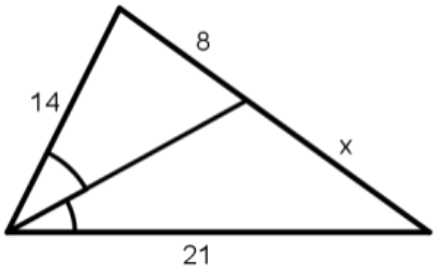
(7)



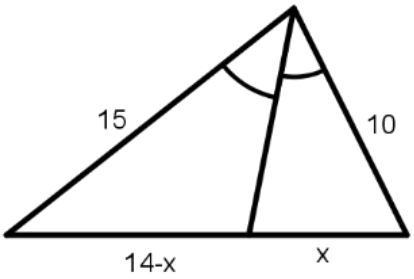
(8)



(9)

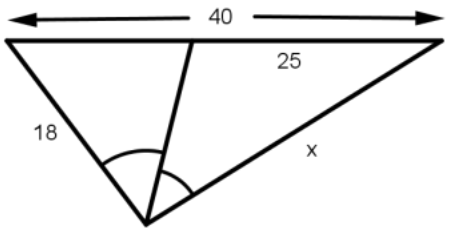


(10)

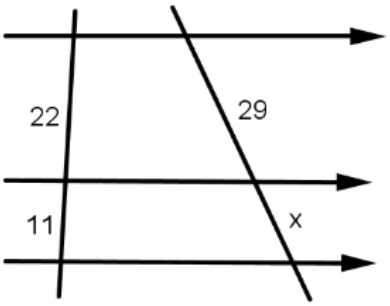


@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

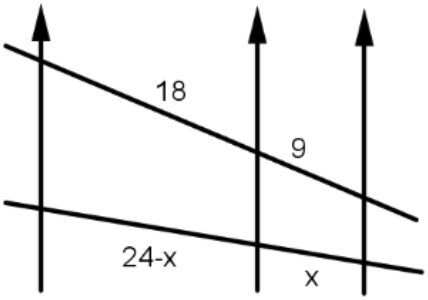
(11)



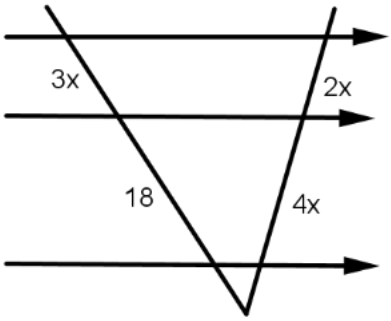
(12)



(13)



(14)



@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

الوحدة الثالثة: نظرية الأعداد



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية

يمكن تقسيم الأعداد الصحيحة لنوعين من الأعداد، أعداد تقبل القسمة على 2 وتسمى أعداد زوجية، أما بقية الأعداد التي لا تقبل القسمة على 2 فتسمى أعداد فردية. يمكن كتابة العدد الصحيح الزوجي على صورة $2n$ حيث n عدد صحيح، كما يمكن كتابة العدد الصحيح الفردي على صورة $2n+1$ حيث n عدد صحيح. العدد الصحيح إما أن يكون زوجيًا أو فرديًا ولا يمكن أن يكون كليهما.

بعض الخواص الأخرى:

(1) فردي $\neq$ زوجي.
(2) فردي $+$ زوجي $=$ زوجي $+$ فردي $=$ فردي، فردي $-$ زوجي $=$ زوجي $-$ فردي $=$ فردي.
(3) زوجي $\pm$ زوجي $=$ زوجي، فردي $\pm$ فردي $=$ زوجي.
(4) إذا كان ناتج ضرب عددين صحيحين زوجيًا فإن أحدهما على الأقل زوجي.
(5) ناتج ضرب عددين صحيحين متتاليين يجب أن يكون زوجيًا.
(6) إذا كان مجموع (أو فرق) أعداد صحيحة فرديًا، فإن عدد الأعداد الفردية في تلك الأعداد فردي.
(7) إذا كان مجموع (أو فرق) أعداد صحيحة زوجيًا، فإن عدد الأعداد الفردية في تلك الأعداد زوجي.
(8) إذا كان ناتج ضرب أعداد صحيحة فرديًا، فإن جميع تلك الأعداد يجب أن تكون فردية.
(9) إذا كان ناتج ضرب أعداد صحيحة زوجيًا، فإن عددًا واحدًا على الأقل من تلك الأعداد يجب أن يكون زوجيًا.

مثال 1:

حدد أي الأعداد التالية زوجي وأيها فردي: $102,\ 203,\ 519,\ 3340,\ 70015,\ 87654$ وأوجد نمطًا للأعداد الفردية والزوجية.

الحل:

العدد 102 عدد زوجي لأنه يمكن كتابته على صورة العدد الزوجي $102 = 2(51)$.

203 فردي لأنه يمكن كتابته على صورة العدد الفردي $203 = 2(101) + 1$.

$519 = 2(259) + 1$ إذن هو عدد فردي.

$3340 = 2(1670)$ إذن هو عدد زوجي.

$70015 = 2(35007) + 1$ إذن هو عدد .....

$87654 = 2(43827)$ إذن هو عدد ..... .

إذا كانت خانة الآحاد للعدد هي $1, 3, 5, 7, 9$ فإنه عدد ..... .

إذا كانت خانة الآحاد للعدد هي $0, 2, 4, 6, 8$ فإنه عدد ..... .

مثال 2:

إذا جمعنا عددين زوجيين، فإن الناتج عدد:

(a) زوجي. (b) فردي.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الحل:

(a) بما أن العددين زوجيان، فإن خانة الآحاد لكليهما هي $0, 2, 4, 6, 8$ إذن عند جمع هذين العددين، فإن خانة الآحاد للمجموع أيضًا ستكون أحد الأعداد $0, 2, 4, 6, 8$.

بالمثل هل تستطيع أن تحدد ما يلي:

إذا جمعنا عددين فرديين، فإن الناتج عدد:

(a) زوجي. (b) فردي.

إذا جمعنا عددًا فرديًا وعددًا زوجيًا، فإن الناتج عدد:

(a) زوجي. (b) فردي.

مثال 3:

إذا اخترنا ثلاثة أعداد صحيحة عشوائيًا a, b, c، فإن الأعداد التالية:

$$\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$$

(a) كلها ليست صحيحة.

(b) أحدها على الأقل صحيح.

(c) اثنان منها على الأقل صحيحان.

(d) كلها صحيحة.

الحل:

(b) أحدها على الأقل صحيح. وذلك لأن هناك حالتين:

الأولى: الأعداد a, b, c كلها من نفس النوع (كلها زوجية، أو كلها فردية)، وفي تلك الحالة مجموع أي اثنين منها سيكون زوجيًا وبالتالي الأعداد الثلاثة $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ ستكون كلها صحيحة.

الثانية: الأعداد a, b, c ليست كلها من نفس النوع، وبالتالي يوجد اثنان منها من نوع والثالث من نوع آخر (عددان فرديان والثالث زوجي، أو العكس)، وبهذا يكون مجموع العددين من نفس النوع زوجيًا، ومجموع العدد الثالث مع أي منهما فرديًا، وبالتالي الأعداد الثلاثة التالية $\frac{a+b}{2}, \frac{b+c}{2}, \frac{c+a}{2}$ سيكون أحدها فقط صحيحًا.

مثال 4:

إذا علمت أن مجموع 100 عدد صحيح موجب هو 10000 وأن عدد الأعداد الفردية فيها أكثر من عدد الأعداد الزوجية، أوجد أكبر عدد ممكن للأعداد الزوجية.

الحل:

بفرض أن عدد الأعداد الزوجية هو x، عدد الأعداد الفردية y حيث $x < y$، وبإضافة x للطرفين نحصل على $2x < x + y$ ومنها $2x < 100$ ومنها $x < 50$. إذا جعلنا أكبر عدد ممكن للأعداد الزوجية هو 49 وقطعًا سيكون مجموعها زوجيًا، فيكون عدد الأعداد الفردية 51 ويكون مجموعها فرديًا، فيصبح مجموع الـ 100 عدد عددًا فرديًا وهذا يناقض أن يكون 10000. عندما عدد الأعداد الزوجية هو 48 سيكون عدد الأعداد الفردية 52 يكفينا أن نثبت تحققه كالتالي:

$$\underbrace{1+1+\ldots..+1}_{52 \text{ مرة}} + \underbrace{2+2+\ldots.+2}_{47 \text{ مرة}} + 9854 = 10000$$

(أو أي طريقة أخرى). وبالتالي أكبر عدد ممكن للأعداد الزوجية هو 48.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

مثال 5:

لدينا n عددًا: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ كل منها إما 1 أو -1. فإذا كان:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$$

ما أدق ما يمكن قوله عن n؟

(a) زوجي.

(b) فردي.

(c) مضاعف للعدد 4.

(d) لا يمكن التحديد.

الحل:

(c) مضاعف للعدد 4. يحتوي المجموع:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1$$

على n من الحدود كل منها إما 1 أو -1. وبهذا يجب أن يكون n عددًا زوجيًا. أي $n = 2k$ حيث k عدد صحيح موجب. من الواضح أن k من الأعداد $x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{n-1}x_n, x_nx_1$ قيمة كل منها 1، وأن k منها قيمة كل منها -1. ومن ناحية أخرى لدينا $(x_1x_2)\cdot(x_2x_3)\cdot\ldots\cdot(x_nx_1) = x_1^2x_2^2\ldots x_n^2 = 1$. إذن $(-1)^k(1)^k = 1$ وبهذا يكون k عددًا زوجيًا. ومن ثم $n = 2k = 4m$ حيث m عدد صحيح موجب. لاحظ أن العكس صحيح أيضًا. أي لكل عدد صحيح n حيث $n = 4m$ يوجد أعداد صحيحة $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تحقق $x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 = 0$.

على سبيل المثال ضع:

$x_1 = x_4 = x_5 = x_8 = \ldots\ldots = x_{4m-3} = x_{4m} = 1$،

$x_2 = x_3 = x_6 = x_7 = \ldots\ldots = x_{4m-2} = x_{4m-1} = -1$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) أوجد نوع العدد الصحيح

$$\frac{1221450987543567886333454214938}{2}$$

بدون إيجاد قيمة العدد نفسه مع التوضيح.

(2) لدينا 50 كتابًا نريد أن نضعها في 5 صناديق. هل يمكن أن يكون في كل صندوق عدد فردي من الكتب؟ برّر إجابتك.

(3) إذا علمت أن a, b عددان صحيحان متتاليان، وأن $c = ab$ و$N^2 = a^2 + b^2 + c^2$، فحدد نوع العدد N من حيث كونه زوجيًا أو فرديًا مع التوضيح.

(4) تحدي: في هذا النمط من الأعداد $1, 2, 5, 13, 34, 89, \ldots$، إذا أخذت أي ثلاثة حدود متتالية وجمعت الأول والثالث تجد الناتج ثلاثة أمثال الثاني
(مثلًا لو أخذنا $1, 2, 5$ **نجد** $1 + 5 = 3(2)$**، ولو أخذنا** $2, 5, 13$ **نجد** $2 + 13 = 3(5)$**، وهكذا).**
السؤال: ما نوع العدد الذي ترتيبه 2003 (من حيث كونه زوجيًا أم فرديًا)؟

(5) معطى ثلاثة أعداد صحيحة x, y, z، اثنان منها فرديان والثالث زوجي.
أثبت أن العدد

$$(x + 1)(y + 2)(z + 3)$$

يجب أن يكون زوجيًا.

(6) نضع بين الأعداد $1, 2, 3, \ldots, 2018$ علامات $+$ أو $-$ بشكل اختياري ثم نحسب الناتج. أثبت أن الناتج سيكون عددًا فرديًا دائمًا.

(7) لدينا (a) العبارة:

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 = 0$$

هل من الممكن استبدال النجوم بعلامات $+$ و $-$ لتصبح العبارة صحيحة؟
(b) نفس السؤال للعبارة

$$1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 = 0$$

(8) في مسابقة للشطرنج كل لاعب سيلعب 20 مباراة. المباراة التي سيكسبها اللاعب يسجل له 3 نقاط، والمباراة التي يتعادل فيها يسجل له نقطة واحدة، والمباراة التي يخسرها تخصم منه نقطة. السؤال: هل من الممكن أن يحصل لاعب على 39 نقطة؟ علّل إجابتك.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

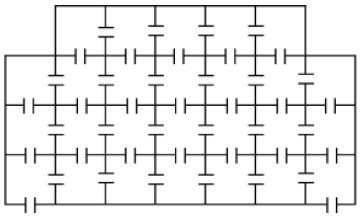
(9) يوجد 10 سلات موضوعة على دائرة. هل من الممكن وضع برتقالات في كل سلة بحيث الفرق بين عدد البرتقال في كل سلتين متجاورتين هو 1؟
(b) ماذا إذا كان هناك 9 سلات؟ برر إجابتك في كل حالة.

(10) دودة تتحرك على خط مستقيم يمكنها أن تقفز في كل قفزة 6 أو 8 سنتيمترات في أحد الاتجاهين (**يمين أو يسار**). هل يمكنها الوصول إلى نقطة تبعد عن موضعها الأصلي:

(a) 1.5 سم. (b) 7 سم. (c) 4 سم.

(11) تحدي: هل يمكنك ترتيب الأعداد العشرة $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5$ في صف بحيث يوجد عدد واحد بين العددين $1, 1$، وعددان بين العددين $2, 2$، وثلاثة أعداد بين العددين $3, 3$، وأربعة أعداد بين العددين $4, 4$، وخمسة أعداد بين $5, 5$؟ برّر إجابتك.

(12) تحدي: هل يمكنك زيارة الغرف الـ 26 في الشكل بحيث تدخل كل غرفة مرة واحدة فقط؟ برّر إجابتك.



@mawhiba | mawhiba.sa
ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025

قابلية القسمة

نقول إن العدد a يقسم العدد b إذا وفقط إذا كان من الممكن كتابة b على الصورة $a \times k$، حيث إن k عدد صحيح.
نكتب ذلك رياضيًا بالشكل $a \mid b$، ونقرأها: «a يقسم b» أو «b قابل للقسمة على a».

على سبيل المثال:

$10 \mid 2$ لأن $10 = 2 \times 5$

$-27 \mid 3$ لأن $-27 = 3 \times (-9)$

$0 \mid 6$ لأن $0 = 6 \times 0$

$10 \nmid 6$ لأنه لا يوجد أي عدد صحيح k يحقق $6k = 10$.

خصائص القابلية للقسمة:

$a \mid b$ إذا وفقط إذا كان $b = ak$ لعددٍ صحيحٍ ما k.
إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$، فإن: $a \mid (b + c)$
إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$، فإن: $a \mid (b - c)$
إذا كان $a \mid b$ و $a \mid c$، فإن: $a \mid (mb + nc)$ لأي عددين صحيحين (m, n).
إذا كان $a \mid b$ و $b \mid c$، فإن: $a \mid c$
إذا كان $a \mid b$، فإن: $a \mid bc$ لأي عدد صحيح (c).
إذا كان $a \mid b$ و $c \mid d$، فإن: $ac \mid bd$

مثال 1:

أوجد جميع القيم الصحيحة الموجبة لـ n التي تحقق:
$n - 1 \mid 3n + 1$.

الحل:

$n = 2, 3, 5$

لاحظ أن:

$n - 1 \mid 3(n - 1) = 3n - 3$ وباستخدام خاصية الطرح نحصل على:

$n - 1 \mid (3n + 1) - (3n - 3) = 4$ وقواسم العدد 4 الموجبة هي:

$1, 2, 4$ وبما أن n عدد موجب، فإن: $n - 1 = 1$ أو 2 أو 4

ومن ثم: $n = 2$ أو 3 أو 5.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) أثبت خصائص القابلية للقسمة باستخدام التعريف.

(2) افترض أن: $(a+3) \mid 11$ و $(b-4) \mid 11$ ما هو باقي قسمة $b-a$ على 11؟

(3) نعلم أن: $n \mid 100$ و $n \mid 36$ ما جميع القيم الموجبة الممكنة لـ n؟

(4) افترض أن: $n \mid 2a+3b$ و $n \mid 5a+7b$ أثبت أن: $n \mid a$
وكذلك: $n \mid b$

(5) إذا كان: $a \mid b$ و $a+b=100$ فأوجد جميع القيم الموجبة الممكنة لـ a و b.

(6) أوجد جميع الأعداد الصحيحة الموجبة n التي تجعل: $(n^2+5n+11)/(n+2)$ عددًا صحيحًا.

(7) أثبت أن: $6 \mid n^3-n$ لكل عدد صحيح موجب n.

(8) تحدي: أوجد جميع الأزواج المرتبة من الأعداد الصحيحة الموجبة (a,b) التي تحقق: $a \mid b+1$ و$b \mid a+1$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة

مراجعة:

- من بين كل الأعداد الصحيحة الموجبة العدد 1 هو العدد الوحيد الذي له قاسم موجب وحيد، وهو الواحد نفسه.
- كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 لها على الأقل قاسمان موجبان.
- إذا كان العدد الصحيح الموجب له فقط قاسمان موجبان (وهما 1 والعدد نفسه) سُمّي العدد **أوليًّا**.
- كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 والتي ليست أولية تسمى **أعدادًا مؤلفة**.

من التعريفات السابقة نستنتج:
- العدد 1 ليس أوليًا ولا مؤلفًا،
- يوجد عدد زوجي أولي وحيد وهو 2 وهو أصغر عدد أولي،
- أصغر عدد مؤلف هو 4.

كل الأعداد الصحيحة الموجبة الأكبر من 1 يمكن تحليلها لعواملها الأولية. بمعنى:

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

حيث $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$ أعداد أولية مختلفة، و$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ أعداد صحيحة غير سالبة،
وسيكون عدد قواسم N الموجبة هو:

$$(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1) \cdots (\alpha_k + 1)$$

مثال 1:

إذا كان $p, p^3 + 5$ عددين أوليين، فإن $p^5 + 7$ عدد (.....)
(a) أولي. (b) مؤلف. (c) أولي أو مؤلف. (d) لا أولي ولا مؤلف.

الحل:

الإجابة (b) مؤلف. إذا كانت p عددًا فرديًا فإن $p^3 + 5$ عدد زوجي أكبر من 5 وهذا يناقض كونه أوليًا، وبالتالي p عدد زوجي وأولي، ومن ثم $p = 2$، بالفعل $p^3 + 5 = 13$ أولي، وعندها $p^5 + 7 = 2^5 + 7 = 39$ عدد مؤلف.

مثال 2:

معطى ثلاثة أعداد أولية p, q, r تحقق $p + q = r$ و$p < q$. أوجد قيمة p.

الحل:

إذا كانت r زوجيًّا فلدينا حالتان: الأولى: p, q كلاهما زوجي، وعندها $p = q = 2$، وهذا يناقض $p < q$. الثانية: p, q كلاهما فردي، وعندها يكون r عددًا زوجيًّا أكبر من 2، وهذا يناقض كون r عددًا أوليًّا. وبالتالي r عدد فردي، ومن ثم أحد العددين p, q فردي والآخر زوجي، ولأن أصغر عدد أولي هو 2، فإن $p = 2$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) معطى أن x, y أوليان، أوجد عدد الثنائيات المرتبة (x, y) التي تحقق المعادلة $x + y = 75$.

$1\ (a)$ $2\ (b)$ $3\ (c)$ $4\ (d)$

(2) لنسمِّ العدد الأولي المكون من خانتين $\overline{ab}$ عددًا مشاغبًا إذا كان العدد $\overline{ba}$ أوليًّا أيضًا. **السؤال:** كم عدد أولي من خانتين مشاغب؟

(3) معطى الأعداد الأولية المختلفة a, b, c تحقق المعادلة

$$a \cdot b^b \cdot c + a = 2000$$

أوجد كل القيم الممكنة للعدد $a + b + c$.

(4) معطى أن الأعداد $p, q, p - q$ أولية، وأن $p + q$ عدد زوجي. أوجد قيمة:

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)^p \left(1 - \frac{1}{3}\right)^q$$

(5) تحدي: إذا علمت أن n عدد صحيح موجب بحيث $n + 3, n + 7$ عددان أوليان، أوجد باقي قسمة n على 3.

(6) تحدي: إذا كان p عددًا أوليًا ليس أقل من 5، والعدد $2p + 1$ أوليًا أيضًا، أثبت أن $4p + 1$ عدد مؤلف.

(7) لدينا المعادلة: $56a = 65b$. أثبت أن لكل زوج مرتب طبيعي (a, b) يمثل حلًّا للمعادلة فإن $a + b$ يكون عددًا مؤلفًا.

(8) إذا كانت p, q, r أعدادًا أولية تحقق

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = \frac{1661}{1986}$$

فأوجد قيمة $p + q + r$.

(9) إذا علمت أن p, q أعداد أولية، $p = m + n$، $q = mn$ حيث m, n عددان صحيحان موجبان. فأوجد قيمة المقدار

$$\frac{p^p + q^q}{m^n + n^m}$$

(10) إذا كان p, q عددين أوليين يحققان $5p + 7q = 129$، فأوجد جميع القيم الممكنة للمقدار $p + q$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(11) تحدي: إذا كانت الأعداد $p, p+2, p+6, p+8, p+14$ كلها أعدادًا أولية، فأوجد قيمة p.

(12) ليكن p, q عددين أوليين، والعدد الصحيح الثابت n يحقق أن:

$$\{n-1, 3n-19, 38-5n, 7n-45\} = \{p, 2p, q, 2q\}$$

ليس بالضرورة بهذا الترتيب. أوجد قيمة n.

(13) تحدي: أثبت أنه يوجد عدد لا نهائي من القيم الصحيحة الموجبة للعدد n تجعل العدد n^2+n+41 مؤلفًا.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الوحدة الرابعة: التركيبـــــات



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

مبادئ العد

قبل التعمق في طرق العد الجديدة، من الضروري مراجعة المفاهيم التي تناولناها سابقًا لأنها أساس لكل طرق العد الباقية.

مراجعة: مبدأي العد الأساسيين

مبدأ الضرب: إذا كانت الحادثة A تحدث بـ m طريقة مختلفة والحادثة B تحدث بـ n طريقة مختلفة، وكان الحدثان مستقلين، فإن الحدثين يمكن أن يتما معًا بـ $m \cdot n$ طريقة.

مبدأ الجمع: إذا كانت الحادثة A تحدث بـ m طريقة مختلفة والحادثة B تحدث بـ n طريقة مختلفة، وكان الحدثان متنافيين، فإن حدوث الحادثة A أو B سيكون بـ $m + n$ طريقة مختلفة.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(1) يقدم أحد المطاعم شطائر لحم بثلاثة أحجام (صغير، وسط، كبير)، بالجبن أو الطماطم أو بدونها. وأراد فيصل أن يطلب شطيرة جبن. بكم طريقة يمكنه عمل ذلك؟

(2) محل أحذية لديه 6 أنواع من الأحذية وكل نوع متوفر بسبعة ألوان. كم عدد الأحذية المختلفة المتوفرة في هذا المحل؟

(3) يتسابق سلمان وأسامة وخالد، بكم طريقة سينتهي السباق إذا كان ممكنًا أن يتعادل اثنان منهم أو أكثر؟

(4) يطلب البنك الأهلي من عملائه الجدد أن يختاروا رقمًا سريًّا مكوّنًا من 4 خانات مختلفة من الأرقام من 1 إلى 5، ويشترط أن تكون القيمة المطلقة للفرق بين كل خانة والتي تليها 2 على الأقل، بكم طريقة يمكن للعميل اختيار الرقم السري؟

(5) بكم طريقة يمكن ترتيب ثلاثة كتب رياضيات مختلفة، وأربعة كتب كيمياء مختلفة، وخمسة كتب فيزياء مختلفة على أحد رفوف مكتبة بشرط أن تكون كتب الموضوع الواحد بجانب بعضها البعض؟

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

عدد الأعداد والأشرطة

هذا نمط شائع من المسائل التي يمكن حلها باستخدام مبادئ العد، ويُطلب فيها إيجاد عدد الأعداد التي تحقق شرطًا معينًا. لتوضيح المسائل القادمة قد تحتاج هذه التعاريف:

عدد طبيعي من n خانة: نقول إن العدد الطبيعي مكون من n منزلة (خانة) إذا كانت أكبر خانة (الخانة الأولى من اليسار والخانة الـ n من اليمين) غير صفرية.

مثلًا: العدد 2345 مكون من أربع منازل، ولكن لا نعتبر العدد 034 مكوّنًا من ثلاث منازل لأن الصفر في المنزلة الأكبر لا يعتد به، ويكتب العدد على الصورة 34 أي أن العدد مكون من منزلتين فقط.

شريط من n رقم:
نقول إن الشريط مكون من n منزلة بغض النظر عن أكبر منزلة هل هي صفر أم لا.

مثلًا: كل مما يلي 01234 و 00034 و 12302 شريط مكون من خمس منازل.

الأعداد المتناظرة:
نقول إن العدد الطبيعي متناظر إذا تحقق أن قراءة أرقام العدد من اليمين إلى اليسار مطابقة لقراءة أرقام العدد من اليسار إلى اليمين.

مثلًا: الأعداد 1234321 و 919 و 6 أعداد متناظرة، بينما العدد 2342 غير متناظر.

سوف يساعدنا مبدآ العد لحساب عدد الأعداد أو الأشرطة المطلوبة بطريقة مبسطة وعميقة. هيا لنبدأ رحلة الإبداع!

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(6) كم عدد صحيح موجب مكون من أربع خانات مختلفة؟

(7) كم عدد صحيح فردي موجب مكون من خمس خانات؟

(8) كم عدد ذو خانتين يمكن تكوينه من أرقام المجموعة $\{0,3,4,5,6,7,8,9\}$، بشرط أن يكون مجموع أرقامه فرديًا؟

(9) كم عدد بين 0 و 1000 يحوي الرقم 5 مرة واحدة فقط؟

(10) كم عدد يقبل القسمة على 3 وله 3 خانات مختلفة يمكن تكوينه من أرقام المجموعة $\{1,3,7,8,9\}$؟

(11) كم عدد الأشرطة ذات 10 منازل، والتي تتكون من واحدات وأصفار فقط بشرط أن تحوي بالضبط خمسة أصفار متجاورة؟

(12) كم عدد الأعداد ذات الخمس خانات، والتي تحقق أن مجموع منزلتها الأولى ومنزلتها الخامسة يساوي 5؟

(13) كم عدد الأعداد المكونة من ست منازل وكل منازلها من نفس النوعية (كلها زوجية أو كلها فردية)؟

(14) كم عدد صحيح موجب ذو 4 خانات، وله بالضبط خانة واحدة «1»، وبالضبط خانة واحدة «3»؟

(15) كم عدد الأعداد المكونة من 3 منازل لها على الأقل منزلة زوجية واحدة؟

(16) كم عدد مكون من أربع خانات بشرط عدم تجاور خانتين زوجيتين؟

(17) كم عدد صحيح موجب أقل من 1000 لا يحتوي على الرقم 7؟

(18) كم عدد الأعداد الصحيحة الموجبة المكونة من خمس خانات مختلفة والتي تحقق أن الفرق الموجب بين أول خانة وآخر خانة يساوي 2؟

(19) عند كتابة الأعداد من 1 إلى 100 كم مرة سنكرر كتابة الرقم 6؟

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(20) كم عدد متناظر له:
(a) 6 خانات مكونة من الأرقام $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$.
(b) 7 خانات مكونة من نفس الأرقام السابقة.
(c) 5 خانات مكونة من الأرقام $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

عدد الكلمات

يمكن حساب عدد الكلمات الإنجليزية المكونة من n حرف باستخدام مبدأ الضرب بشكل مباشر. في مسائل العد ليس بالضرورة أن يكون للكلمات الناتجة معنى.

مثال:

عدد الكلمات المتكونة من 4 أحرف يساوي:

الحرف الأول		الحرف الثاني		الحرف الثالث		الحرف الرابع		
أي حرف		أي حرف		أي حرف		أي حرف		**عدد الكلمات**
26 طريقة	$\times$	26 طريقة	$\times$	26 طريقة	$\times$	26 طريقة =		26^4

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(21) كم عدد الكلمات المكونة من 5 حروف مختلفة؟

(22) كم عدد طرق ترتيب حروف كلمة PRODUCT؟

(23) كم عدد الكلمات المكونة من 6 أحرف بشرط أن يكون الحرف الأول والثالث والسادس مختلفة؟

(24) كم كلمة مكونة من 3 حروف يكون فيها حرف M مرة واحدة فقط؟

(25) كم كلمة مكونة من 3 حروف يكون فيها حرف M مرة واحدة على الأقل وممنوع تكرار أي حرف آخر؟

(26) كم كلمة مكونة من 3 حروف يكون فيها حرف M مرة واحدة على الأقل ومسموح بتكرار حرف آخر (قد يظهر حرف آخر مرتين)؟

(27) اخترع الفريق السعودي لأولمبياد الأمن السيبراني لغة خاصة به تتكون من أربعة حروف فقط. في لغته أطول كلمة تحتوي على 6 أحرف على الأكثر. كم عدد كلمات هذه اللغة؟

(28) نعرف الكلمة الجيدة على أنها كلمة مكونة فقط من الحروف A وB وC (يمكن لأحد هذه الحروف ألّا يظهر في الكلمة) بحيث لا يلي فيها مباشرة الحرف B الحرف A ولا الحرف C الحرف B، ولا الحرف A الحرف C. كم عدد الكلمات الجيدة المكونة من 7 حروف؟

(29) كم عدد الكلمات المتناظرة المكونة من سبعة أحرف والتي لا تبدأ بحرف علة؟ حروف العلة هي (A, E, I, O, U).

(30) كم عدد طرق كتابة الحروف الإنجليزية كلها في صف بشرط أن يوجد بالضبط خمسة أحرف بين الحرفين x و y؟

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

التباديل

نبدأ بمثال لتوضيح الفكرة وراء التباديل:

مثال:

بكم طريقة يمكن للأصدقاء أحمد ومحمد ويونس وحمزة وهاشم أن يقفوا في صف واحد لالتقاط صورة جماعية؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم في صف لالتقاط الصورة؟

الحل:

عند ترتيب الأصدقاء الخمسة جميعًا في صف: هناك 5 خيارات لمن سيكون الأول من اليمين، وبعدها هناك 4 طرق لاختيار الثاني من اليمين، و3 طرق للذي في الوسط وطريقتان لقبل الأخير وسيبقى خيار واحد للأخير بينهم.

العدد الكلي للطرق هو $120 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$.

وعند ترتيب ثلاثة فقط منهم: عدد الطرق بنفس الطريقة سيكون $60 = 5 \times 4 \times 3$.

بملاحظة النمط في حل هذا السؤال وعدد من الأسئلة الأخرى يمكننا أن نستنتج قانونًا يعمل في حالة كان الهدف أن نعد طرق اختيار عدد من عناصر مجموعة ما (عدد من الأشخاص في المثال السابق) ثم ترتيبهم.

التباديل: إذا كان لدينا مجموعة تحوي n من الأشياء وأردنا اختيار k منها مع مراعاة الترتيب وبدون تكرار، فإن عدد الاختيارات هو:

$$^{n}P_{k} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-k+1)$$

ويقرأ n تباديل k.

بعد أن تعرفنا على مفهوم التباديل، نعود للمثال السابق:

مثال:

بكم طريقة يمكن للأصدقاء أحمد ومحمد ويونس وحمزة وهاشم أن يقفوا في صف واحد لالتقاط صورة جماعية؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم في صف لالتقاط الصورة؟ وبكم طريقة يمكن أن يقف 3 منهم على الأقل في صف لالتقاط الصورة؟

الحل:

عند ترتيب الأصدقاء الخمسة جميعًا في صف: عدد الطرق $^{5}P_{5} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

وعند ترتيب ثلاثة فقط منهم: عدد الطرق $^{5}P_{3} = 60$.

وعند ترتيب ثلاثة على الأقل: عدد الطرق $^{5}P_{3} + {}^{5}P_{4} + {}^{5}P_{5} = 60 + 120 + 120 = 300$ طريقة.

ملاحظة: يمكننا كتابة $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ كـ $5!$ ويقرأ مضروب 5.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

المضروب: مضروب n هو حاصل ضرب الأعداد الصحيحة الموجبة التي تقل عن n أو تساويه، ويرمز له بعلامة التعجب $(!)$:

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

لاحظ أن:

$${}^{n}P_{n} = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 1$$

وهو يمثل اختيار كل الـ n من الأشياء مع مراعاة الترتيب.
كما يمكن كتابة التباديل على الصورة:

$${}^{n}P_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

احسب $3!$، $3! \times 4$، $4!$. ماذا تلاحظ؟

نتيجة: لأي عدد صحيح موجب n، لدينا $n! = (n-1)! \cdot n$.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تدريبات:

(31) ملعب كرة قدم له خمسة عشر بابًا. بكم طريقة يمكنك الدخول من باب والخروج من باب آخر؟

(32) في صالة اجتماعات توجد 7 مصابيح. لنحافظ على الإنارة مناسبة للصالة يجب أن يكون مصباح واحد على الأقل مضاءً. فبكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

(33) لدينا المجموعة $\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$،
(a) كم عدد المجموعات الجزئية منها؟
(b) كم عدد المجموعات الجزئية منها والتي لا تحوي عددًا فرديًا؟
(c) كم عدد المجموعات الجزئية منها والتي تحوي عددًا فرديًا واحدًا فقط؟

(34) لدينا لوحة مربعة مقسمة إلى مربعات متطابقة، بُعدا اللوحة 2026×2026، وأردنا أن نظلل المربعات في اللوحة بحيث نظلل مربعًا واحدًا بالضبط في كل صف وفي كل عمود. (بفرض أن التدوير والقلب يعطيان أشكالًا مختلفة)
(a) بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟
(b) لو اشترطنا عدم تظليل المربعات في الزوايا بكم طريقة يمكن عمل ذلك؟

(35) كم عدد مكون من أربع خانات فيه خانتان متطابقتان فقط وتحوي خانة الألوف فيه رقمًا أصغر من 3؟

(36) من مجموعة تحتوي على 9 عناصر، كم عدد المجموعات الجزئية غير الخالية التي تحتوي على عدد زوجي من العناصر؟

(37) كم عددًا مكوّنًا من 5 خانات مختلفة بحيث يكون رقما الخانتين الأولى والأخيرة زوجيين؟

(38) في دوري كرة القدم، يرغب المنظمون في اختيار 3 فرق ليتم تتويجها في الحفل السنوي، بحيث تحصل الفرق المختارة على مراكز مختلفة: الأول، الثاني، والثالث. يختار كل فريق فائز لاعبًا منه لاستلام الجائزة.
إذا كان في الدوري 12 فريقًا، ويضم كل فريق 25 لاعبًا، فبكم طريقة يمكن اختيار الفرق الثلاثة مع تحديد اللاعبين؟

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

الإجابات



ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

إلى الطالب

نؤمن بأن تعلّم الرياضيات يقوم على التفكير العميق في المسألة، وعلى التعثّر فيها ومواصلة المحاولة؛ فبهذا تُبنى القدرة الحقيقية على الحل. لذلك نكتفي في هذا القسم بالإجابات النهائية فقط دون الحلول التفصيلية، لتحاول حل كل مسألة بنفسك أولًا. وإذا أردت الاطلاع على الحلول الكاملة، فشاهد مقاطع الفيديو الخاصة بنسمو.

إجابات (الجبر)

النسبة المئوية:

(1) 30

(2) 30%

(3) 18 قطعة

(4) 162°

(5) $a : c = 17 : 21$

(6) 80%

(7) 3125 سمكة

(8) $4t : 2u = 1 : 2$

(9) $k = \frac{1}{4}$

(10) $k = 18$

(11) $a = 5$، $b = 2$، $c = 1$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

معادلة الدرجة الأولى في متغير واحد:

(1) $x = -\frac{74}{167}$

---

(2) $x = a + b + c$

---

(3) لا يوجد حل حقيقي.

---

(4) إذا $a \neq 1$: $x = \frac{5-20b+8ab}{20(a-1)}$؛ إذا $a = 1$ و $b = \frac{5}{12}$: كل عدد حقيقي حل؛ إذا $a = 1$ و $b \neq \frac{5}{12}$: لا يوجد حل.

---

(5) $a = \frac{5}{3}$، $b = \frac{26}{9}$

---

(6) $a = 2$

---

(7) 6 قيم $(k = 1, 2, 3, 4, 6, 12)$

---

(8) قيمة واحدة فقط: $x = 2$

---

(9) 3

---

(10) $x = \frac{n^2}{n-m}$

المعادلات الخطية في عدة متغيرات:

(1) عدد لا نهائي من الحلول.

---

(2) $(a)\ x = 10$، $y = 3$ $(b)\ x = 4$، $y = 1$ $(c)\ x = 8$، $y = 6$ $(d)\ x = 5$، $y = 4$

---

(3) 25 و 17

---

(4) الساعة 3:09

---

(5) $x = \frac{59}{4}$، $y = -\frac{11}{4}$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(6) $y = 5 \text{ ،} x = 15$

(7) $y = -3 \text{ ،} x = 2$

(8) $z = \frac{75}{41} \text{ ،} y = \frac{45}{41} \text{ ،} x = \frac{30}{41}$

(9) $u = 4 \text{ ،} z = 3 \text{ ،} y = 2 \text{ ،} x = 1$

(10) $z = \frac{2c+a-b}{14} \text{ ،} y = \frac{2b+c-a}{14} \text{ ،} x = \frac{2a+b-c}{14}$

(11) $4a - c = 9$

(12) $(a, b, c) = (2, 3, 4)$

(13) $k \neq -2 \ (a) \text{ ،} k$ لا توجد قيمة لـ $(b) \text{ ،} k = -2 \ (c)$

(14) $z - y = 2021$

(15) $z = -3 \text{ ،} y = 5 \text{ ،} x = 7$

(16) $v = -1 \text{ ،} u = 3 \text{ ،} z = 7 \text{ ،} y = 6 \text{ ،} x = 0$

أسئلة التحدي:

(1) $b = \frac{1}{4} \text{ ،} a = \frac{1}{10}$

(2) $z = 1 \text{ ،} y = 3 \text{ ،} x = 5$

(3) مثال: $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{3}$ (وعمومًا $\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{a+1}$)

(4) $3 : 7$

(5) 23 طفلًا

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(6) $c = 1$

(7) 553451234512345

(8) سؤال إنشاء – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(9) نور بنت (عمرها 5 سنوات).

(10) 25 كاذبًا

(11) لا، أكبر عدد ممكن هو 16 مربعًا.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

إجابات (الهندسة)

تدريبات المراجعة:

(1) $4n + m = 180°$

(2) $\angle A = 23°$

(3) $\angle EAD = 141°$

(4) $x = a + c + d - b$

(5) $\angle DBF = 36°$ (حيث $\angle BDF = 90°$)

(6) $\angle BAC = 2b - 2a$ (a) ؛$\angle BDC = b - a$ ، $a = 39°$ (b) ، $b = 58.5°$

(7) $y = 2x$

(8) $\angle EDC = 20°$ ، $\angle BDC = 90°$

(9) $\angle ACE = \frac{180° - 3x}{2}$

(10) $a = 42°$ ، $b = 84°$ ، $c = 63°$ ، $d = 14°$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

التشابه:

(1–8)

التدريب	المضلعان	دائمًا متشابهان	أحيانًا متشابهان	التشابه مستحيل
(1)	مثلثان متطابقا الأضلاع.	✓		
(2)	مثلثان متطابقا الضلعين.		✓	
(3)	مربعان.	✓		
(4)	معينان.		✓	
(5)	مثلثان قائما الزاوية.		✓	
(6)	مثلثان مختلفا الأضلاع.		✓	
(7)	مستطيلان.		✓	
(8)	مثلث قائم الزاوية ومثلث حاد الزوايا.			✓

(9–16)

(9) $\frac{3}{4}$

(10) شبه منحرف

(11) $\angle D_1 = 45°$

(12) $\angle C_1 = 135°$

(13) $C_1B_1 = 8$

(14) $AD = 15$

(15) $C_1D_1 = 4k$

(16) $\frac{3}{4}$

(17) $x = \frac{65}{4}$، $y = \frac{64}{5}$، $z = \frac{56}{5}$

(18) $x = \frac{126}{5}$، $y = \frac{108}{5}$، $z = \frac{162}{5}$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

تشابه المثلثات:

(1) متشابهان

(2) غير متشابهين

(3) متشابهان

(4) متشابهان

(5) متشابهان

(6) لا يمكن الاستنتاج

(7) متشابهان

(8) لا يمكن الاستنتاج

(9) متشابهان

(10) $\angle ABC = 40°$؛ $\triangle ABC \sim \triangle GEF$

(11) $\triangle JKN \sim \triangle MLN$ (a)؛ $\frac{15}{20} = \frac{18}{x}$ (b)؛ $\frac{15}{20} = \frac{12}{y}$، $x = 24$، $y = 16$ (c)

(12) $x = 6$، $y = 4$

(13) $x = 24$، $y = \frac{11}{2}$

(14) $x = \frac{64}{3}$، $y = 4$

(15) $\triangle ACD$ (a) و $\triangle CBD$ (أي $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$)؛ $x = 15$، $y = 9$ (b)

(16) طول العمود $GF = 5.5$ م

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(17) طول البناية في الفيلم 0.55 سم

(18) $IR = 47.25$ م

$(19–24)$

التدريب	عبارة التشابه	النظرية
(19)	$\triangle ABC \sim \triangle GNK$	SAS
(20)	$\triangle ABC \sim \triangle ARS$	SAS
(21)	$\triangle ABC \sim \triangle THJ$	AA
(22)	$\triangle ABC \sim \triangle MBL$	SAS
(23)	$\triangle ABC \sim \triangle XRN$	SSS
(24)	$\triangle ABC \sim \triangle AEF$	AA

الأطوال المتناسبة:

(1) الصحيحة: (b)، (d)؛ الخاطئة: (a)، (c)، (e)، (f)

(2) الصحيحة: (c)، (d)؛ الخاطئة: (a)، (b)

$(3–6)$

	(3)	(4)	(5)	(6)
AB	6	15	21	37.5
BC	10	25	35	62.5
AC	16	40	56	100

(7) $x = \frac{64}{3}$

(8) $x = 26$

(9) $x = 12$

(10) $x = \frac{28}{5}$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(11) $x = 30$

---

(12) $x = 14.5$

---

(13) $x = 8$

---

(14) $x = 3$

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

إجابات (نظرية الأعداد)

الأعداد الصحيحة الزوجية والفردية:

(1) العدد فردي.

(2) لا يمكن؛ مجموع 5 أعداد فردية فردي بينما 50 زوجي.

(3) N عدد فردي.

(4) الحد الذي ترتيبه 2003 عدد زوجي.

(5) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(6) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(7) (a) نعم، مثلًا $1+2-3+4+5+6-7-8=0$؛ (b) لا يمكن (مجموع الأعداد 45 فردي).

(8) لا يمكن؛ مجموع النقاط دائمًا عدد زوجي و 39 فردي.

(9) (a) نعم، مثلًا $1,2,1,2,\ldots,1,2$؛ (b) لا يمكن.

(10) (a) لا؛ (b) لا؛ (c) نعم (مثلًا 6 سم مرتين لليمين ثم 8 سم لليسار).

(11) لا، الترتيب غير ممكن.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(12) غير ممكن.

قابلية القسمة:

(1) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(2) الباقي 7.

(3) $n = 1, 2, 4$.

(4) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(5) $(a, b) = (1, 99), (2, 98), (4, 96), (5, 95), (10, 90), (20, 80), (25, 75), (50, 50)$.

(6) $n = 3$.

(7) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(8) $(a, b) = (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)$.

الأعداد الأولية والأعداد المؤلفة:

(1) الإجابة (b): حلان هما $(2, 73), (73, 2)$.

(2) 9 أعداد: $11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97$.

(3) $a + b + c = 42$ (القيمة الوحيدة).

(4) $\frac{9}{4}$.

(5) الباقي 1.

(6) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

(7) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(8) $p+q+r=336$.

(9) $\frac{31}{3}$.

(10) $p+q\in\{19,25\}$.

(11) $p=5$.

(12) $n=7$.

(13) مسألة إثبات – شاهد الحل في مقاطع نسمو.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

إجابات (التركيبات)

مبادئ العد:

(1) 3 طرق.

(2) 42 حذاءً مختلفًا.

(3) 13 طريقة.

(4) 20 طريقة.

(5) $3! \times 3! \times 4! \times 5! = 103680$ طريقة.

عدد الأعداد والأشرطة:

(6) 4536 عددًا.

(7) 45000 عدد.

(8) 28 عددًا.

(9) 243 عددًا.

(10) 24 عددًا.

(11) 64 شريطًا.

(12) 5000 عدد.

(13) 28125 عددًا.

(14) 720 عددًا.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

(15) 775 عددًا.

(16) 4625 عددًا.

(17) 728 عددًا.

(18) 5040 عددًا.

(19) 20 مرة.

(20) $8^3 = 512$ (a)؛ $8^4 = 4096$ (b)؛ 648 (c).

عدد الكلمات:

(21) $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7893600$ كلمة.

(22) $7! = 5040$ طريقة.

(23) 274185600 كلمة.

(24) 1875 كلمة.

(25) 1876 كلمة.

(26) 1951 كلمة.

(27) 5460 كلمة.

(28) $3 \times 2^6 = 192$ كلمة جيدة.

(29) $21 \times 26^3 = 369096$ كلمة.

(30) $40 \times 24!$ طريقة.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa

التباديل:

(31) $15 \times 14 = 210$ طريقة.

---

(32) $2^7 - 1 = 127$ طريقة.

---

(33) (a) $2^8 = 256$ مجموعة جزئية؛ (b) 16 مجموعة جزئية؛ (c) 64 مجموعة جزئية.

---

(34) (a) $2026!$ طريقة؛ (b) $2024! \times 2023 \times 2024$ طريقة.

---

(35) 864 عددًا.

---

(36) 255 مجموعة جزئية.

---

(37) 5376 عددًا.

---

(38) 20625000 طريقة.

ص.ب : 700 الريـاض 11421
المملكـة العربيـة السعوديـة هاتـف : 920014025
@mawhiba | mawhiba.sa